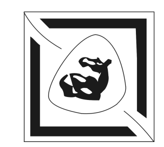


МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ В Г. ТАГАНРОГЕ



ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Таганрог 2012

УДК: 519.14

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Доктор технических наук, профессор, зав.кафедрой математики и информатики Таганрогского института управления и экономики ***Карелин В.П.***;

Доктор технических наук, профессор, зав.кафедрой информатики Таганрогского государственного педагогического института ***Ромм Я.Е.***

Берштейн Л.С., Боженюк А.В. Основы дискретной математики. − Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2012. – 127 с.

Табл. 11. Ил. 49. Библиогр.: 11 назв.

Учебное пособие предназначено для студентов специальности 080801 «Информационные системы (в экономике)», изучающих дисциплину «Основы дискретной математики». В работе изложены такие разделы дискретной математики, как теория множеств, алгебра логики, минимизация булевых функций. Содержит также контрольные вопросы и задачи по каждому разделу.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная работа представляет собой учебное пособие, в котором рассматриваются некоторые элементарные понятия «дискретной», или «конечной» математики, то есть математики, изучающей конечные множества и различные структуры на них. Это означает, что понятия бесконечности или непрерывности не являются предметом изучения. Дискретная математика имеет достаточно большой спектр приложений, прежде всего в областях, связанных с информационными технологиями и вычислительной техникой.

Пособие основано на лекционном курсе, которые авторы в течении многих лет читают студентам кафедры «Прикладная информатика» Технологического института Южного федерального университета в г.Таганроге, что наложило определенный отпечаток на выбор материала.

Учебное пособие охватывает такие разделы дискретной математики, как теория множеств, алгебра логики, отношения, соответствия, минимизация булевых функций. В конце каждой главы имеются два раздела – «контрольные вопросы» и «упражнения и задачи».

В целом учебное пособие преследует две основные цели:

- Познакомить студента с максимально широким кругом понятий дискретной математики. Тем самым у студента формируется терминологический запас, необходимый для самостоятельного изучения специальной литературы.
- Сообщить студенту необходимые конкретные сведения из дискретной математики, предусмотренные стандартной программой.

1. МНОЖЕСТВА

1.1. Понятие множества

Совокупность различных объектов, рассматриваемых как единое целое, принято называть множеством. В качестве объектов, называемых элементами множества, могут выступать любые предметы, явления или понятия. Синонимами термина «множество», кроме совокупности, являются система, класс, семейство. Множество и элемент исходные, первоначальные понятия.

Условимся множества чаще всего обозначать прописными латинскими буквами, а элементы множества - строчными. Для того чтобы показать, что множество A образовано из элементов a,b,c, пишут $A=\{a,b,c\}$. Фигурные скобки объединяют элементы в единое целое - множество.

Тот факт, что элемент b принадлежит множеству A, обозначают $b \in A$. Читают «b принадлежит A» или «b из A». Если элемент d не принадлежит множеству A, то пишут $d \notin A$. Здесь $\in$ и $\notin$ - знаки принадлежности и не принадлежности элемента множеству.

Число элементов множества A называют мощностью этого множества и обозначают $|A|$.

Множества бывают конечные и бесконечные. Множество называют конечным, если оно содержит конечное число элементов, и бесконечным в противном случае. Ясно, что множество $A=\{a,b,c\}$ - конечно, поскольку содержит 3 элемента, а множество всех натуральных чисел $N=\{1,2,3, \ldots\}$ - бесконечно.

1.2. Способы задания множеств

Существуют два основных способа задания множеств: перечисление и описание его элементов. Перечисление состоит в получении полного списка элементов множества, которым элементы данного множества обладают, а все остальные нет.

Конечные множества можно задавать обоими способами, причем выбор того или иного способа зависит от удобства задания и дальнейшей работы с множеством. Бесконечные множества можно задавать только с помощью описания.

В общем виде множество перечислением элементов задают списком $A= \{a_1, a_2, \ldots , a_n\}$ или $A=\{a_i\}$, $i \in I=\{1,2, \ldots , n\}$, а с помощью

описания его элементов определяют следующим образом. Если M - произвольное множество, а P - некоторое свойство, то $A=\{x\in M \,/\, P(x)\}$ - множество тех и только тех элементов $x\in M$, которые обладают свойством P. Пусть N - множество натуральных чисел, а P - свойство быть простым числом, тогда $A=\ \{x\in N \,/\, P(x)\}$ - множество всех простых чисел.

При задании множеств с помощью описания необходимо так задавать свойство, характеризующее элементы, чтобы оно было непротиворечивым для каждого элемента. При невыполнении этого условия возможны парадоксы в задании множеств. Рассмотрим примеры таких парадоксов.

Первый пример. Профессор на экзамене потребовал от студента решить задачи всех тех и только тех студентов группы, которые не могли сделать это сами. Студенту необходимо образовать множество задач, которые требуется решить. Он оказался в тупике, не зная, как поступить с собственной задачей. Если он может ее решить, то по требованию профессора решать свою задачу не должен, а если не может, то ему необходимо ее решить. Этот парадокс известен в студенческих кругах под названиями «Решить или не решать?» или «Как обмануть профессора?».

Второй пример. Если множество не является своим собственным элементом, то такое множество будем называть ординарным. Легко видеть, что большинство рассматриваемых множеств - ординарны. Множество всех студентов, множество натуральных чисел и множество точек плоскости представляют собой ординарные множества, поскольку первое из них не является студентом, второе - натуральным числом, а третье - точкой.

Однако существуют такие множества, которые содержат себя в качестве элемента. Например, множество всех множеств является множеством, множество всех абстрактных понятий является абстрактным понятием. Такие множества назовем экстраординарными.

Образуем теперь множество A всех ординарных множеств и определим, ординарно оно или экстраординарно. Если A ординарно, то оно входит в себя в качестве элемента, поскольку образуется из всех ординарных множеств. Но в этом случае, по определению, полученное множество является экстраординарным. Если множество A экстраординарно, то, по определению экстраординарности, оно должно быть своим собственным элементом. Однако множество A

содержит только все ординарные множества и не содержит экстраординарные. Поэтому множество A содержит себя в качестве элемента и не может быть экстраординарным. Таким образом, множество A, при данном описании свойств его элементов, не может быть ни ординарным, ни экстраординарным.

В дальнейшем будем иметь дело с такими множествами, которые определены однозначно и без противоречий.

1.3. Включение в семейство множеств

Множество однозначно определяется его элементами. Порядок элементов во множестве не существует. Во множестве не может быть одинаковых неразличимых элементов. Отсюда следует, что два множества A и B равны тогда и только тогда, когда они состоят из одних и тех же элементов. Равенство множеств A и B обозначается $A=B$. В противном случае пишут $A\neq B$.

Множество, не содержащее никаких элементов, называется пустым и обозначается $\varnothing$. Очевидно, что $|\varnothing|=0$. Пустыми множествами являются, например, множество нечетных чисел, делящихся на 2 без остатка, и множество людей, живущих в настоящее время на других планетах солнечной системы.

Множество A, содержащее один элемент a, называется одноэлементным и записывается $A=\{a\}$. В качестве элемента можно взять любое множество, включая пустое. Отсюда следует, что $A=\varnothing$ и $A=\{\varnothing\}$, вообще говоря, разные множества, так как $|\varnothing|=0$, а $|\{\varnothing\}|=1$, поскольку А=$\{\varnothing\}$ - одноэлементное множество, имеющее в качестве элемента пустое множество. Другим примером одноэлементного множества служит $A=\{\{d,c,f\}\}$, Здесь элементом является множество $\{d,c,f\}$, состоящее, в свою очередь, из трех элементов.

Множество A называется подмножеством множества B и обозначается $A\subseteq B$, если любой элемент $x\in A$ принадлежит множеству B. Здесь $\subseteq$ - знак включения, который читается “включается”, “содержится”, “является подмножеством”. Если существует хотя бы один элемент множества A, который не принадлежит множеству B, то в этом случае A не является подмножеством B, что обозначается $A\not\subset B$. Если $A\subseteq B$ и $A\neq B$, то говорят, что A строго включается в B и пишут $A\subset B$. В противном случае, $A\not\subset B$. Множество B иногда называется

надмножеством множества A, если $A \subseteq B$ или $A \subset B$. Пусть В={a, 1, $\sqrt{3}$, γ} , тогда А={γ, 1}включается в B, а С={a,1,{$\sqrt{3}$,γ}} не содержится в B, так как элемент {$\sqrt{3}$, γ} из множества C не является элементом B.

Любое множество M содержит, по крайней мере , два подмножества - пустое множество и само множество M, то есть $\varnothing \subseteq M$ и $M \subseteq M$. Доказательства того, что $\varnothing \subseteq M$ и $M \subseteq M$ следуют из определения подмножества. Множества M и $\varnothing$ называются несобственными подмножествами множества M. Все остальные подмножества, если они существуют, называются собственными.

Если M - произвольное множество, то семейством всех подмножеств множества M называется и через $\Re(M)$ обозначается множество, элементами которого являются все подмножества множества М. Из определения следует, что $\varnothing \in \Re(M)$, $M \in \Re(M)$ и каково бы ни было A, если $A \subseteq M$, то $A \in \Re(M)$.

Если $M=\varnothing$, то $\Re(M)=\{\varnothing\}$.

Если $M=\{a\}$, то $\Re(M) = \{M, \varnothing\}$.

Если $M=\{a,b\}$, то $\Re(M) =\{M,\varnothing,\{a\},\{b\}\}$.

Если $M=\{a,d,c\}$, то $\Re(M) =\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \varnothing, M\}$.

Таким образом, нетрудно видеть, что добавление одного элемента в множество M увеличивает мощность семейства $\Re(M)$ вдвое. Отсюда, если $|M|=m$, то $|\Re(M)| =2^m$.

1.4. Контрольные вопросы

1. Что понимается под терминами “элемент” и “множество”?
2. Какие способы задания множеств вы знаете?
3. Какие множества называются равными?
4. Чем отличаются множества $\varnothing$ и $\{\varnothing\}$?
5. Какие подмножества данного множества называются несобственными?
6. Как для произвольного конечного множества построить семейство всех его подмножеств?
7. Какая разница между понятиями “принадлежность множеству” и “включение в множество”?

1.5. Упражнения

1. Задать множество:

а) элементами которого являются простые числа, которые больше 3, но меньше 28;

б) элементами которого являются все гласные буквы данного предложения.

2. Записать произвольное одноэлементное множество, элементом которого также является множество.

3. Является ли a, 2, b элементами множества В=$\{\{a\},\{2,3\},b\}$ или нет?

4. Из каких элементов множества $M=\{\sqrt{3},\{a,b\},\varnothing\}$ можно составить множество, имеющее только несобственные подмножества?

5. Запишите семейство всех подмножеств множества А=$\{a,b,c,d\}$.

6. Составьте такие множества A, B и C, для которых:

6.1) $A \in B$ и $A \subseteq C$;

6.2) $A \in B$ и $B \subseteq C$;

6.3) $A \in B$ и $A \subseteq C$ и $B \not\subset C$;

6.4) $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$;

6.5) $A \in B$ и $A \subseteq B$;

6.6) $A \in B$ и $A \subset B$.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ЛОГИКИ

2.1. Понятие высказывания

В логике высказыванием называют предложение, относительно которого можно сказать, истинно оно или ложно в настоящее время. Отсюда истинность каждого высказывания имеет два значения: истина, которую будем обозначать единицей, и ложь, которая обозначается нулем. Следует заметить, что в логике каждое высказывание рассматривается безотносительно к его смыслу, а только в связи со значением его истинности. Примерами высказываний являются: “два - простое число”, “элемент a принадлежит множеству $\{a,d,c\}$”, “множество С=$\{a,f\}$ включается в множество $A=\{a,b,c\}$”. Значения истинности первого и второго высказываний совпадают и равны 1, а значение истинности третьего высказывания равно 0. Высказывания, также как и множества, будем обозначать прописными буквами.

Высказывания бывают простые и составные. Составные высказывания образуются из простых с помощью логических операций, которые в языке соответствуют логическим союзам. К логическим операциям относятся отрицание, конъюнкция, и дизъюнкция, эквивалентность и некоторые другие, которым соответствуют логические союзы “не”, “и”, “или”, “если”..., “тогда и только тогда, когда” и ряд других.

2.2. Логические операции

Любую логическую операцию можно задать с помощью таблицы истинности, которая отображает значение истинности составного высказывания в зависимости от истинности образующих его простых высказываний.

Отрицанием высказывания A называется высказывание, обозначаемое $\bar{A}$ или $\rceil$A, которое истинно тогда, когда высказывание A ложно, и наоборот. Таблица истинности данной операции имеет вид

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

Конъюнкцией высказываний A, B называется составное высказывание, обозначаемое $A\&B$, которое истинно тогда, когда высказывания A, B одновременно истинны, и ложно во всех остальных случаях. В некоторых случаях конъюнкцию высказываний A, B будем обозначать $A \wedge B$ или просто AB. Читается «А и В».

Дизъюнкцией высказываний A, B называется составное высказывание, обозначаемое $A \vee B$, которое ложно тогда, когда высказывания A, B одновременно ложны, и истинно во всех остальных случаях. Читается «A или B».

Импликацией высказываний A, B называется составное высказывание, обозначаемое $A \to B$, которое ложно тогда, когда высказывание A, называемое посылкой, истинно, а высказывание B, называемое следствием, ложно. Читается «A влечет B», или «если A, то B».

Эквивалентностью высказываний A, B называется составное высказывание, обозначаемое $A \leftrightarrow B$, которое истинно тогда, когда значения истинности высказываний A, B совпадают, и ложно в противном случае. Читается «A эквивалентно B», «A тогда и только тогда, когда B».

Неравнозначностью высказываний A, B называется составное высказывание, обозначаемое $A \oplus B$, которое истинно тогда, когда значения истинности высказываний A, B противоположны, и ложно в противном случае. Читается «A неравнозначно B».

Таблицы истинности для указанных операций имеют вид:

Таблица 2.1.

A	B	$A\&B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$	$A \oplus B$
0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	0

В составном высказывании порядок выполнения логических операций определяется круглыми скобками, а при их отсутствии сначала выполняется отрицание, затем конъюнкция, далее дизъюнкция, а потом все остальные.

Например, определим значение истинности составного высказывания

$$D = A \& (A \& B \rightarrow \overline{C}) \vee \overline{A} \& B,$$

при A=0, B=1, C=0. Исходя из определений логических операций, получаем $A\&B$=0, $A\&B\rightarrow\overline{C}$=1, $A\&(A\&B\rightarrow\overline{C})$=0, $\overline{A}\&B$=1, D=1.

Рассмотрим обратную задачу. Пусть D=0. Необходимо найти хотя бы один набор значения высказываний A, B, C, при которых D=0. В составном высказывании D последней логической операцией является дизъюнкция, поэтому составные высказывания $A\&(A\&B\rightarrow\overline{C})$=0 и $\overline{A}\&B$=0. Для того чтобы $A\&(A\&B\rightarrow\overline{C})$ равнялось 0, необходимо чтобы или A=0, или $A\&B\rightarrow\overline{C}$ равнялось 0. Рассмотрим случай, когда $A\&B\rightarrow\overline{C}$=0. Последней операцией здесь является импликация, равная 0 в единственном случае, когда $A\&B$=1, а $\overline{C}$=0. Отсюда имеем C=1 и A=1 и B=1. Ясно, что при A=1 и B=1 составное высказывание $\overline{A}\&B$=0. Таким образом, требуемый набор значений A, B, C определен.

2.3. Логические формулы

Введем теперь понятие высказывательных переменных $x_1, x_2, .., x_n$ и логических формул. Под высказывательной переменной x_i будем понимать высказывание, значение истинности которого может равняться 0 или 1 в зависимости от заранее оговоренных условий.

Логической формулой $A(x_1, x_2, ..., x_n)$, ($n \geq 1$) называется:

а) любая высказывательная переменная;

б) если $A_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $A_2(x_1, x_2, ..., x_n)$ - логические формулы, то применяя к ним конечное число раз логические операции, получим логическую формулу;

в) никаких других логических формул не существует.

Логическая формула $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ задается с помощью таблицы истинности. В строках таблицы истинности перечисляются все возможные значения высказывательных переменных $x_1, x_2, .., x_n$, а в столбце, определяющем истинность логической формулы, ставятся значения, которые принимает эта формула на каждом из наборов значений истинности переменных $x_1, x_2, .., x_n$.

Можно отметить, что рассмотренные выше составные высказывания $\rceil A$, $A \vee B$, $A\&B$, $A\rightarrow B$, $A\leftrightarrow B$, $A\oplus B$ являются, по сути дела, логическими формулами, если A и B рассматривать как высказывательные переменные.

Равными (эквивалентными) формулами $A_1(x_1, x_2,...,x_n)$ и $A_2(x_1, x_2,...,x_n)$, называются формулы, которые на одних и тех же наборах высказывательных переменных $(x_1, x_2, ..., x_n)$ принимают одни и те же значения истинности.

Логическая формула, которая на всех наборах значений высказывательных переменных истинна, является тождественно истинным высказыванием и обозначается константой 1. Аналогично, логическая формула, которая на всех наборах значений высказывательных переменных ложна, является тождественно ложным высказыванием и обозначается константой 0.

Установление равенства или эквивалентности двух и более формул является одной из важнейших задач математической логики и ее применений. Для решения этих задач получены следующие основные равенства логических формул.

Пусть x, y, z - логические формулы, тогда для операций (&, $\vee$, $\rceil$) имеют место следующие равенства:

- закон двойного отрицания, или инволюция:

$$\overline{\overline{x}} = x \; ; \qquad (2.1)$$

- закон коммутативности, или переместительный закон для & и $\vee$:

$$x \vee y = y \vee x, \qquad (2.2)$$

$$x \& y = y \& x; \qquad (2.3)$$

- закон ассоциативности, или сочетательный закон для & и $\vee$:

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, \qquad (2.4)$$

$$x \& (y \& z) = (x \& y) \& z; \qquad (2.5)$$

- закон дистрибутивности, или распределительные закон для & и $\vee$:

$$x \& (y \vee z) = (x \& y) \vee (x \& z), \qquad (2.6)$$

$$x \vee (y \& z) = (x \vee y) \& (x \vee z); \qquad (2.7)$$

- закон де Моргана:

$$\overline{x \vee y} = \overline{x} \& \overline{y} \; ; \qquad (2.8)$$

$$\overline{x \& y} = \overline{x} \vee \overline{y} \; . \qquad (2.9)$$

Для операций с константами 0 и 1 имеют место соотношения:

$$\overline{0} = 1 \text{ и } \overline{1} = 0 \; ; \qquad (2.10)$$

$$x \& 1 = x; \; x \& 0 = 0; \qquad (2.11)$$

$$x \vee 0 = x \; ; \; x \vee 1 = 1; \qquad (2.12)$$

$$x \vee x = x \; ; \qquad (2.13)$$

$$x \,\&\, \bar{x} = 0, \quad x \,\&\, \bar{x} = 0; \qquad (2.14)$$

Тождества (2.1)-(2.14) назаются основными. Из них легко выводятся новые тождества:

- закон поглощения:

$$x \vee x \& y = x; \qquad (2.15)$$

$$x \& (x \vee y) = x. \qquad (2.16)$$

Полагая в (2.15) y=1, а в (2.16) y=0, приходим к закону повторяемости:

$$x \vee x = x; \qquad (2.17)$$

$$x \& x = x. \qquad (2.18)$$

Также выполняется тождество:

$$x \vee (\bar{x} \& y) = x \vee y. \qquad (2.19)$$

Для операций $\oplus$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ совместно с рассмотренными выше операциями справедливы равенства:

- коммутативность:

$$x \oplus y = y \oplus x; \qquad (2.20)$$

- ассоциативность:

$$x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z; \qquad (2.21)$$

- дистрибутивность & относительно $\oplus$:

$$x \& (y \oplus z) = (x \& y) \oplus (x \& z); \qquad (2.22)$$

$$x \oplus x = 0; \qquad (2.23)$$

$$x \oplus 1 = \bar{x},\ x \oplus 0 = x; \qquad (2.24)$$

$$x \oplus y = x \,\&\, \bar{y} \vee \bar{x} \,\&\, y; \qquad (2.25)$$

$$x \rightarrow y = \bar{x} \vee y; \qquad (2.26)$$

- закон контрапозиции:

$$x \rightarrow y = \bar{y} \rightarrow \bar{x}; \qquad (2.27)$$

$$(x \rightarrow y) \& (y \rightarrow x) = x \leftrightarrow y; \qquad (2.28)$$

$$\bar{x} \rightarrow y = \bar{y} \rightarrow x = x \vee y. \qquad (2.29)$$

Полученные равенства можно легко доказать с помощью таблиц истинности и понятия равенства логических формул. Докажем, к примеру, (2.8) и (2.25), записывая последовательно значения истинности для формул, составляющих доказываемые выражения, на

всех наборах высказывательных переменных. Тогда получим таблицу 2.2, из которой следуют доказываемые равенства.

Таблица 2.2

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$x \& y$	$\overline{x \& y}$	$\bar{x} \vee \bar{y}$	$x \& \bar{y}$	$\bar{x} \& y$	$x \& \bar{y} \vee \bar{x} \& y$	$x \oplus y$
0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0

Однако метод доказательства равенств логических формул с помощью таблиц истинности мало приемлем для случаев, когда число высказывательных переменных велико, поскольку при этом размерность таблиц истинности растет по показательному закону. Если *n* - число высказывательных переменных, то таблица истинности должна содержать 2^n строк. Поэтому для доказательства равенств логических формул используют эквивалентные преобразования, которые основаны на (2.1) - (2.29) или вытекающих из них выражениях.

Докажем, например, равенство $A_1(x,y,z)=A_2(x,y,z)$, где $A_1(x,y,z) = ((x \to z) \oplus y) \to \overline{x \& z}$, а $A_2(x,y,z) = \bar{x} \vee \bar{z} \vee y \& z$.

Используя (2.26), преобразуем $A_1(x,y,z)$ к виду:

$$A_1(x,y,z) = (\overline{(x \to z) \oplus y}) \vee \overline{x \& z}.$$

Применяя еще раз (2.26) и (2.8), получим:

$$A_1(x,y,z) = (\overline{(\bar{x} \vee z) \oplus y}) \vee \bar{x} \vee \bar{z}.$$

Использование (2.25) приводит к выражению:

$$A_1(x,y,z) = \overline{(\overline{(\bar{x} \vee z)} \& y \vee (\bar{x} \vee z) \& \bar{y})} \vee \bar{x} \vee \bar{z}.$$

Применяя последовательно три раза (2.8), а также (2.1), получим

$$A_1(x,y,z) = \overline{(\overline{(\bar{x} \vee z)} \& y)} \& \overline{((\bar{x} \vee z) \& \bar{y})} \vee \bar{x} \vee \bar{z} =$$

$$= (\overline{\overline{(\bar{x} \vee z)}} \vee \bar{y}) \& (\overline{(\bar{x} \vee z)} \vee \bar{\bar{y}}) \vee \bar{x} \vee \bar{z} = (\bar{x} \vee z \vee \bar{y}) \& (x \& \bar{z} \vee y) \vee \bar{x} \vee \bar{z}.$$

В этом выражении по (2.6) раскроем скобки:

$$A_1(x,y,z) = \bar{x} \& x \& \bar{z} \vee \bar{x} \& y \vee z \& x \& \bar{z} \vee z \& y \vee \bar{y} \& x \& \bar{z} \vee \bar{y} \& y \vee \bar{x} \vee \bar{z}.$$

На основании (2.14) и (2.12) получаем:

$$A_1(x,y,z) = \bar{x} \& y \vee z \& y \vee \bar{y} \& x \& \bar{z} \vee \bar{x} \vee \bar{z}.$$

Из данного выражения с учетом (2.15) окончательно приходим к:

$$A_1(x,y,z) = z \& y \vee \bar{x} \vee \bar{z}.$$

Тем самым равенство доказано.

Представление любой логической формулы в таком виде, в котором используются операции конъюнкция, дизъюнкция а отрицание, если таковые имеются, относятся только к высказывательным переменным, называется безынверсной формой логической формулы. Следовательно, $A_2(x,y,z)$ является безынверсной формой $A_1(x,y,z)$.

2.4. Кванторы

В дальнейшем иногда будем рассматривать такие логические формулы, которые зависят не от высказывательных переменных, а от переменных, которые определены на каком-либо конечном или бесконечном множестве элементов. Свои значения формулы принимают из множества {0,1}. Такие логические формулы называются предикатами. Например, логическая формула $A(x,y)$ от двух переменных, или предикат вида $x+y\leq 10$, где $x,y\in N$, принимает значение 1 для $x=y=3$, а для $x=10$, $y=1$ - значение, равное 0. Нетрудно определить ее истинность в зависимости от других значений аргументов.

Рассмотрим еще две операции, называемые навешиванием кванторов.

Введем символ “$\forall$ “, который обозначает квантор общественности и читается “для всех...”, или “для любого...”, а также символ “$\exists$“, обозначающий квантор существования, который читается как “существует такой...”, или “имеется такой...”.

Пусть $A(x)$ - логическая формула от одной переменной x, принимающей значения из множества M.

Выражение $(\forall x\in M)A(x)$ является высказыванием и читается “для любого x из M значение $A(x)$ истинно”.

Выражение $(\exists x\in M)A(x)$ является высказыванием и читается “существует такое x из M, что значение $A(x)$ истинно”.

Навешивание одного из кванторов превращает логическую формулу, зависящую от одной переменной, в высказывание, т.е. связывает переменную.

Нетрудно видеть, что квантор общности является аналогом конъюнкции, а квантор существования - дизъюнкции. Если $M=\{b_1,..., b_m\}$, то имеет место:

$$(\forall x\in M)A(x)=A(b_1)\&A(b_2)\&...\&A(b_m); \qquad (2.30)$$

$(\exists x \in M)A(x)=A(b_1)\text{v}(b_2)\text{v}...\text{v}A(b_m).$ (2.31)

Если к левой и правой части выражения (2.30) применить операцию отрицания, то в соответствии с законом де Моргана (2.8) и формулой (2.31), получим:

$$\overline{(\forall x \in M)\,A(x)} = (\exists x \in M)\,\overline{A(x)}\,. \qquad (2.32)$$

Аналогично, справедливо:

$$\overline{(\exists x \in M)\,A(x)} = (\forall x \in M)\,\overline{A(x)}\,. \qquad (2.33)$$

На логическую формулу $A(x_1,...,x_n)$, зависящую от n переменных, можно навесить от одного до n различных или одинаковых кванторов. Навешивание любого квантора на какую-либо переменную x_i связывает эту переменную. Если навесить $к$ кванторов, $к<n$, то получим логическую формулу, зависящую от n-$к$ переменных. Навешивание всех n кванторов приводит к высказыванию.

При навешивании одноименных кванторов, порядок их расположения не существен. Поэтому

$(\forall x_i \in M)(\forall x_j \in M)A(x_1,...,x_n)=(\forall x_j \in M)(\forall x_j \in M)A(x_1,...,x_n)$;

$(\exists x_i \in M)(\exists x_j \in M)A(x_{1,...,}x_n)=(\exists x_j \in M)(\exists x_i \in M)A(x_1,...,x_n)$.

Порядок навешивания разноименных кванторов, вообще говоря, существен.

2.5. Контрольные вопросы

1. Что понимается под термином “высказывание”?

2.Является ли высказыванием предложение “Жизнь прекрасна и удивительна!”?

3.Какие логические операции вы знаете?

4.Какой порядок выполнения логических операций в составных высказываниях?

5.Как определить значение истинности составного высказывания?

6.Что называется логической формулой?

7.Каким образом можно задать логическую формулу?

8.Как устанавливается равенство двух логических формул?

9.Что называется безынверсной формулой?

10.Какова взаимосвязь между кванторами и логическими операциями конъюнкции и дизъюнкции?

2.6. Упражнения и задачи

1.Используя таблицы истинности, доказать равенства логических формул:

1) $x \vee (y\&z)=(x \vee y)\&(x \vee z)$;

2) $x\&(y \vee z)=(x\&y) \vee (x\&z)$;

3) $x\&(y \oplus z)=(x\&y) \oplus (x\&z)$;

4) $x\&(x \vee y)=x$;

5) $x \vee (x\&y)=x$;

6) $\bar{x} \rightarrow y = x \vee y$;

7) $\bar{y} \rightarrow x = x \vee y$;

8) $\overline{x \oplus y} = x \leftrightarrow y$.

П. Привести логическую формулу A(x,y,z) к безинверсной форме, если:

1) $A(x,y,z) = \overline{x \rightarrow (y \vee z)}$;

2) $A(x,y,z) = \overline{(x \rightarrow y)} \rightarrow \overline{z \,\&\, \bar{x}}$

3) $A(x,y,z) = \overline{(x \vee y \rightarrow \bar{x}\& y}$;

4) $A(x,y,z) = \overline{(\overline{(\overline{x\& y}) \vee z}) \rightarrow \bar{y}\& \bar{z}}$;

5) $A(x,y,z) = (\overline{((x\& \bar{y}) \vee \bar{z})\& x) \rightarrow \bar{y}}$.

Ш. Доказать равенства логических формул, используя выражения (2.1)-(2.29):

1) $\overline{x\& y} \rightarrow y = y$;

2) $\overline{x \rightarrow y} \rightarrow \overline{z \vee \bar{y}} = x \rightarrow y$;

3) $((x \oplus \bar{y})\&y \vee x)\&z = x\&z$;

4) $(\overline{((x \vee \bar{y})\& \bar{z}) \vee x) \rightarrow \bar{y}}) = x\& y$.

3.ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

3.1. Свойства включения множеств

Прежде чем рассматривать операции над множествами, сформулируем и докажем ряд свойств, которыми обладает включение множеств.

Рассмотрим утверждение, вытекающее из определения равенства и включения множеств:

$$(A\subseteq B)\&(B\subseteq A)\leftrightarrow (A=B). \tag{3.1}$$

Выражение (3.1) является эквивалентностью логических формул. Для его доказательства воспользуемся (2.28) и запишем:

$$((A\subseteq B)\&(B\subseteq A)\rightarrow (A=B))\&((A=B)\rightarrow (A\subseteq B)\&(B\subseteq A)). \tag{3.2}$$

Таким образом, для доказательства (3.2) требуется доказать истинность двух импликаций:

$$(A\subseteq B)\&(B\subseteq A) \rightarrow A=B, \tag{3.3}$$

$$(A=B) \rightarrow (A\subseteq B)\&(B\subseteq A). \tag{3.4}$$

Чтобы доказать истинность импликации в общем случае, необходимо из предположения об истинности посылки вывести истинность следствия. При этом исключается, в соответствии с определением импликации, единственный случай, когда импликация ложна.

Покажем истинность (3.3). Пусть посылка $(A\subseteq B)\&(B\subseteq A)$ истинна. Тогда по определению операции включения справедливо высказывание $(\forall x\in A)(x\in B)\&(\forall x\in B)(x\in A)$, откуда следует, что множества A и B состоят из одних и тех же элементов и, следовательно, равны.

Докажем теперь истинность (3.4). Пусть посылка $(A=B)$ истинна. Отсюда из определения равенства множеств следует, что $(\forall x\in A)(x\in B)\&(\forall x\in B)(x\in A)$, т.е. $(A\subseteq B)\&(B\subseteq A)$.

Таким образом, импликации (3.3) и (3.4) истинны. Отсюда вытекает истинность конъюнкции (3.2), а, следовательно, и справедливость утверждения (3.1).

Из определения включения множеств вытекает свойство, называемое транзитивностью включения:

$$A\subseteq B \;\&\; B\subseteq C \rightarrow A\subseteq C, \tag{3.5}$$

а также аналогичное свойство для строгого включения:

$$A\subset B \;\&\; B\subset C \rightarrow A\subset C. \qquad (3.6)$$

Введем понятие множества, которое назовем универсумом и обозначим ***E***. Универсум ***E*** - это такое множество, что все множества, рассматриваемые в данном круге задач, являются его подмножествами. Семейство всех подмножеств универсума обозначим $\Re(\boldsymbol{E})$. Таким образом, любое множество M является элементом $\Re(\boldsymbol{E})$.

Заметим, что существует бесконечно большое число различных универсумов, причем каждый из них определяется кругом решаемых задач. В тоже время пустое множество единственно.

3.2. Операции над множествами

Рассмотрим теперь ряд операций над множествами. Пусть множества $A,B,C\in\Re(\boldsymbol{E})$.

Объединением множеств A и B называется множество C, обозначаемое $C=A\cup B$, элементы которого принадлежат множеству A или множеству B. Иначе говоря, для произвольного элемента x выполняется:

$$x\in C \leftrightarrow x\in A \vee x\in B\,. \qquad (3.7)$$

Если взять отрицание левой и правой частей (3.7), то получим эквивалентное высказывание:

$$\overline{x\in C} \leftrightarrow \overline{x\in A \vee x\in B}\,.$$

Используя определение операции отрицания и (2.8), приходим к истинности:

$$x\notin C \leftrightarrow x\notin A \,\&\, x\notin B\,. \qquad (3.8)$$

Пусть $A=\{g, e, \{1,2), к\}$, $B=\{a, e, 7, f\}$. Тогда $C=A\cup B=\{g, e, \{1,2\}, к, a, 7, f\}$.

Из определений включения и операции объединения следует, что

$$A\subseteq A\cup B,\;\; B\subseteq A\cup B. \qquad (3.9)$$

Пересечением множеств A и B называется множество C, обозначаемое $C=A\cap B$, элементы которого принадлежат одновременно множеству A и множеству B. Другими словами, для произвольного элемента x можно записать

$$x \in C \leftrightarrow x \in A \,\&\, x \in B. \qquad (3.10)$$

Эквивалентное ему высказывание в том случае, когда элемент $x \notin A \cap B$, имеет вид:

$$x \notin C \leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B. \qquad (3.11)$$

Если множества A и B не имеют общих элементов, то их пересечение равно пустому множеству, т.е. $A \cap B = \varnothing$. В этом случае множества A и B называются непересекающимися.

Рассмотрим примеры. Пусть $A=\{1,3,14,8\}$, $B=\{8,14,27,6\}$. Тогда $C=A \cap B=\{14,8\}$. Если $A=\{a,b,c\}$, $B=\{\{a,b\},d,e\}$, то $C=A \cap B=\varnothing$.

Из определений включения и операции пересечения множеств вытекает:

$$A \cap B \subseteq A, \quad A \cap B \subseteq B. \qquad (3.12)$$

Операции объединения и пересечения множеств естественным образом распространяются на произвольное число множеств.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – произвольные множества из $\Re(\boldsymbol{E})$.

Тогда $C=A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_i A_i$, $i=1,2, \ldots ,n$, если для произвольного x

$$x \in C \leftrightarrow x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n, \qquad (3.13)$$

а $C= A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_i A_i$, если для произвольного x

$$x \in C \leftrightarrow x \in A_1 \,\&\, x \in A_2 \,\&\, \ldots \,\&\, x \in A_n. \qquad (3.14)$$

Рассмотрим теперь операцию ***разности*** множеств, применимую только к двум произвольным множествам из $\Re(\boldsymbol{E})$. Разностью множеств A и B называется множество C, обозначаемое $C=A \backslash B$, элементы которого принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B, т.е. для произвольного элемента x

$$x \in C \leftrightarrow x \in A \,\&\, x \notin B. \qquad (3.15)$$

Если элемент $y \notin A \backslash B$, то получаем

$$y \notin C \leftrightarrow y \notin A \vee y \in B. \qquad (3.16)$$

Пример. Если $A=\{a,b,c,d,e\}$, $B=\{a,d,f,g\}$, то $A \backslash B=\{b,c,e\}$, а $B \backslash A=\{f,g\}$.

Нетрудно видеть, что

$$A \backslash B \subseteq A, \quad B \backslash A \subseteq B. \qquad (3.17)$$

В случае, когда множество $A \subseteq B$, то ***дополнением*** множества A до B называется множество, обозначаемое $\overline{A}$, равное разности множеств B и A, т.е. $\overline{A} = B \setminus A$.

Для произвольного множества $M \in \Re(\boldsymbol{E})$ можно определить дополнение $\overline{M}$ до универсума $\boldsymbol{E}$:

$$\overline{M} = \boldsymbol{E} \setminus M. \quad (3.18)$$

Таким образом, если над произвольным множеством M стоит знак дополнения, то, вообще говоря, дополнение можно взять до любого множества, в которое включается множество M. Когда это специально не оговорено, то дополнение берется до универсума $\boldsymbol{E}$.

Симметрической разностью множеств A и B называется множество C, обозначаемое, $C=A\Theta B$, элементы которого принадлежат множеству $A \setminus B$ или множеству $B \setminus A$. Поэтому для произвольного x можно записать:

$$x \in C \leftrightarrow x \in A \setminus B \vee x \in B \setminus A,$$

или

$$x \in C \leftrightarrow x \in A \;\&\; x \notin B \vee x \in B \;\&\; x \notin A. \quad (3.19)$$

Если $y \notin A\Theta B$, то получаем выражение

$$y \notin C \leftrightarrow y \in A \;\&\; y \in B \vee y \notin A \;\&\; y \notin B.$$

Пример. Пусть $A=\{a,b,c,d,e\}$, $B=\{a,d,f.g\}$, тогда $A\Theta B=\{b,c,e,f,g\} = B\Theta A$.

Из (3.17) и определения симметрической разности вытекает, что

$$A\Theta B \subseteq A \cup B. \quad (3.20)$$

3.3. Основные свойства операций

Рассмотрим теперь основные свойства операций дополнение, объединение и пересечение на множестве $\Re(\boldsymbol{E})$.

Пусть A, B, $C \in \Re(\boldsymbol{E})$ – произвольные множества. Имеют место следующие равенства:

$$\overline{\overline{A}} = A, \quad \text{(инволюция)} \quad (3.21)$$

$$\left.\begin{matrix} A \cup A = A \\ A \cap A = A \end{matrix}\right\}, \quad \text{(индемпотентность)} \quad (3.22)$$

$$\left.\begin{array}{l} A \bigcup B = B \bigcup A \\ A \bigcap B = B \bigcap A \end{array}\right\},$$ (коммутативность) (3.23)

$$\left.\begin{array}{l} A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup B \bigcup C \\ A \bigcap (B \bigcap C) = (A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap B \bigcap C \end{array}\right\},$$ (ассоциативность) (3.24)

$$\left.\begin{array}{l} A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C) \\ A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C) \end{array}\right\},$$ (дистрибутивность) (3.25)

$$\left.\begin{array}{l} \overline{A \bigcup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \end{array}\right\},$$ (закон де Моргана) (3.26)

$$\left.\begin{array}{l} A \cup \overline{A} = E \\ A \cap \overline{A} = \varnothing \end{array}\right\},$$ (3.27)

$$\left.\begin{array}{l} A \cup \varnothing = A \\ A \cap \varnothing = \varnothing \end{array}\right\},$$ (3.28)

$$\left.\begin{array}{l} A \cup E = E \\ A \cap E = A \end{array}\right\},$$ (3.29)

$$\overline{E} = \varnothing,\ \overline{\varnothing} = E\ .$$ (3.30)

Для операций разность и симметрическая разность совместно с рассмотренными выше операциями на множестве $\Re(\boldsymbol{E})$ справедливы равенства:

$A \backslash B = A \cap \overline{B}$, (3.31)

$A \backslash (A \backslash B) = A \cap B$, (3.32)

$(A \backslash B) \backslash C = (A \backslash C) \backslash (B \backslash C)$, (3.33)

$A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash (A \cap C)$, (3.34)

$A \Theta A = \varnothing$, $A \Theta \varnothing = A$, $A \Theta E = \overline{A}$, (3.35)

$A \Theta B = B \Theta A$, (3.36)

$A \Theta (B \Theta C) = (A \Theta B) \Theta C = A \Theta B \Theta C$, (3.37)

$A \cap (B \Theta C) = (A \cap B) \Theta (A \cap C)$, (3.38)

$A \Theta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$. (3.39)

Основным методом доказательства равенств с множествами является доказательство, основанное на (3.1). Назовем его методом взаимного включения. Пусть необходимо доказать равенство двух произвольных множеств M, N из $\Re(\boldsymbol{E})$, которые получены из каких-либо других множеств, принадлежащих $\Re(\boldsymbol{E})$ с помощью

рассмотренных выше теоретико-множественных операций. Для доказательства $M=N$ необходимо показать, что $M \subseteq N$ и $N \subseteq M$. Чтобы показать, например, что $M \subseteq N$, требуется, на основании определения включения множеств, а также свойств теоретико-множественных и логических операций, из истинности высказывания $x \in M$ для произвольного элемента x вывести истинность высказывания $x \in N$. Это делается с помощью последовательного доказательства истинности в цепочке импликаций.

Докажем, например, свойство дистрибутивности и закон де Моргана.

Для доказательства (3.25) необходимо показать, что

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad 3.40)$$

и

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C). \qquad (3.41)$$

Докажем (3.40). Пусть для произвольного элемента x высказывание $x \in A \cup (B \cap C)$ истинно. Тогда по (3.7) истинно высказывание $x \in A \vee x \in (B \cap C)$. Используя (3.10), приходим к истинному высказыванию $x \in A \vee (x \in B \& x \in C)$. По (2.5) осуществляем истинный переход к высказыванию $(x \in A \vee x \in A) \& (x \in A \vee x \in C)$. По (3.7) получаем $x \in (A \cup B) \& x \in (A \cup C)$, а по (3.10) имеем $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Следовательно, выражение (3.40) доказано.

Докажем теперь (3.41). Пусть для произвольного элемента x высказывание $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ истинно. Тогда по (3.10) и (3.7) истинно высказывание $(x \in A \vee x \in B) \& (x \in A \vee x \in C)$. Используя (2.5), получаем истинное высказывание $x \in A \vee (x \in B \& x \in C)$. Отсюда по (3.10) и (3.7) приходим к $x \in A \cup (B \cap C)$. Таким образом, (3.41) и дистрибутивность объединения относительно пересечения (3.25) доказаны.

Поскольку в процессе доказательства осуществляются истинные переходы, т.е. из истинности посылки высказывания K выводится истинность следствия высказывания L, то в дальнейшем для сокращения рассуждений истинный переход будем обозначать знаком логической операции импликации ($\rightarrow$), а после него в квадратных скобках помещать номера тех равенств, на основании которых выполнен данный переход.

Докажем теперь закон де Моргана (3.26): $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Для этого необходимо показать, что

$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B} \quad (3.42)$$

и

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}. \quad (3.43)$$

Докажем (3.42). Пусть для произвольного элемента x истинно $x \in \overline{A \cap B}$. Тогда

$$x \in \overline{A \cap B} \to x \notin A \cap B \to x \notin A \vee x \notin B \to x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B} \to x \in \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Следовательно, справедливость (3.42) показана.

Докажем (3.43). Предположим, что для произвольного х истинно $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Тогда

$$x \in \overline{A} \cup \overline{B} \to x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B} \to x \notin A \vee x \notin B \to x \notin A \cap B \to x \in \overline{A \cap B}.$$

Таким образом мы показали справедливость (3.43) и (3.26).

В некоторых случаях необходимо доказывать не равенство двух множеств M и N из $\Re(\boldsymbol{E})$, а равенство множества $L \in \Re(\boldsymbol{E})$ пустому множеству, т.е. $L=\varnothing$. Доказательство при этом проводится, как правило, от противного. Полагают, что множество $L \neq \varnothing$, т.е. существует хотя бы один элемент, принадлежащий этому множеству, и показывают, что данное предположение является ложным высказыванием и приводит к противоречию.

Докажем этим методом равенство:

$$(A \backslash (A \backslash B)) \backslash (A \cap B) = \varnothing. \quad (3.44)$$

Предположим, что множество $(A \backslash (A \backslash B)) \backslash (A \cap B)$ не пусто, т.е. существует элемент x, принадлежащий этому множеству, и покажем с помощью цепочки импликаций, что данное предположение является ложным высказыванием. Действительно,

$$x \in ((A \backslash (A \backslash B)) \backslash (A \cap B) \to x \in A \backslash (A \backslash B) \,\&\, x \notin A \cap B \to x \in A \,\&$$
$$\&\, x \notin (A \backslash B) \,\&\, x \notin A \cap B \to x \in A \,\&\, (x \notin A \vee x \in B) \,\&\, (x \notin A \vee x \notin B) \to$$
$$\to x \in A \,\&\, (x \notin A \,\&\, x \notin A \vee x \notin A \,\&\, x \notin B \vee x \in B \,\&\, x \notin A \vee x \in B \,\&\, x \notin B) \to$$
$$\to x \in A \,\&\, (x \notin A \vee x \notin A \,\&\, x \notin B \vee x \in B \,\&\, x \notin A \vee 0) \to$$
$$\to x \in A \,\&\, (x \notin A) = 0.$$

Следовательно, равенство (3.44) доказано.

Используя описанный метод доказательства от противного, можно доказывать и равенства вида $M=N$, $M,N \in \Re(\boldsymbol{E})$. Для этого нужно доказать два равенства: $M \backslash N=\varnothing$ и $N \backslash M=\varnothing$. Как нетрудно

видеть, из справедливости $M\setminus N=\varnothing$ следует, что $M\subseteq N$, а из $N\setminus M=\varnothing$ следует, что $N\subseteq M$.

По аналогии с доказательством выражения (3.44) легко доказать справедливость равенства

$$(A\cap B)\setminus(A\setminus(A\setminus B))=\varnothing,$$

и тем самым завершить доказательство (3.32).

3.4. Покрытие и разбиение множеств

Пусть M - произвольное непустое множество. Покрытием множества M называется семейство $\Re$ множеств, для которых выполняются следующие условия:

$$(\forall X\in\Re)(X\neq\varnothing); \tag{3.45}$$

$$(\forall X\in\Re)(X\subseteq M); \tag{3.46}$$

$$\bigcup_{X\in\Re} X = M\,. \tag{3.47}$$

Иначе говоря, покрытие $\Re$ представляет собой совокупность непустых подмножеств множества M, объединение которых равно множеству M.

Элементы семейства R называются классами покрытия множества M. Например, классами покрытия множества студентов данной группы являются множество студентов, занимающихся только учебой, множество студентов, занимающихся спортом, множество студентов, принимающих участие в художественной самодеятельности или научной работе.

Другим примером является покрытие множества M={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12} классами, состоящими из простых чисел, четных чисел, чисел, делящихся на 3, и чисел, кратных 4.

Как нетрудно видеть, этими классами являются X_1={1,2,3,5,7,11,}, X_2={2,4,6,8,10,12}, X_3={3,6,9,10,12}, X_4={4,8,12}.

Класс покрытия называется максимальным, если он не является подмножеством никакого другого класса данного покрытия. В рассмотренном выше примере классы X_1, X_2, X_3 являются максимальными, а класс X_4 таковым не является, поскольку $X_4\subseteq X_2$.

В случае, когда попарное пересечение всех различных классов покрытия является пустым множеством, приходим к частному виду покрытия, называемому разбиением множества.

Разбиением множества M называется семейство $\Im\Im\Im$ множеств, для которых выполняются следующие условия:

$$(\forall X \in \Im\Im\Im)\ (X \neq \varnothing); \tag{3.48}$$

$$(\forall X \in \Im\Im\Im)\ (X \subseteq M); \tag{3.49}$$

$$(\forall X \in \Im\Im\Im)\ (\forall\ Y \in \Im\Im\Im)(X \neq Y \rightarrow X \cap Y = \varnothing); \tag{3.50}$$

$$\bigcup_{X \in \Im\Im\Im} X = M\ . \tag{3.51}$$

Элементы семейства $\Im\Im\Im$ называются классами разбиения. Например, классами разбиения множества студентов данного института являются множества студентов, обучающихся на различных факультетах, а семейство факультетов является разбиением исходного множества студентов института. В свою очередь, семейство курсов является разбиением множества студентов факультета, если считать, что ни один студент не учится одновременно на различных курсах.

Пусть $M = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$. Семейство $\Im\Im\Im_1 = \{X_1, X_2, X_3\}$ является разбиением множества M, если $X_1 = \{x_5\}$, $X_2 = \{x_1,\ x_7,\ x_8\}$, $X_3 = \{x_2, x_3, x_4, x_6\}$ и семейство $\Im\Im\Im_2 = \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$ также является разбиением множества M при $У_1 = \{x_2, x_4\}$, $У_2 = \{x_1, x_3, x_5\}$, $У_3 = \{x_7, x_8\}$, $У_4 = \{x_6\}$, поскольку для них выполняются условия (3.48) - (3.51).

Разбиение $\Im\Im\Im$ множества M называется поэлементным, если каждый класс разбиения $\Im\Im\Im$ является одноэлементным множеством. Разбиение $\Im\Im\Im$ множества M называется целым, если оно содержит один класс совпадающий с самим множеством M. Указанные разбиения называются тривиальными. Если существуют другие разбиения множества M, то они называются нетривиальными.

Если необходимо множество M, содержащее m элементов, разбить на k классов, соответственно с m_1 элементами в первом классе, m_2 - во втором и т.д., $m_к$ - в k-ом классе, причем $m_1 + m_2 + _{\dots} + m_к = m$, то число возможных разбиений N на такие классы определяется формулой:

$$N = \frac{m!}{m_1! \times m_2! \times \ldots \times m_k!}.$$

Например, пусть множество М состоит из пяти элементов. Определим число способов разбиения его на два класса, состоящих из трех и двух элементов: $N = \frac{5!}{2! \times 3!} = 10.$

2.5. Контрольные вопросы

1. В каком случае существует взаимное включение множеств?

2. Что называется объединением, пересечением, разностью и симметрической разностью множеств?

3. Что называется дополнением множества?

4. Чему равняется $\overline{\varnothing}$?

5. В каком случае объединение, пересечение, разность двух множеств является пустым множеством?

6. Чем отличается симметрическая разность от разности множеств?

7. Когда объединение двух множеств равняется их пересечению?

8. Когда пересечение двух множеств равняется их симметрической разности?

9. В каком случае пересечение двух множеств пусто, а их разность не является пустым множеством?

10. Какие методы доказательств равенств с множествами вам известны?

11. Какие разбиения существуют у одноэлементного множества?

12. При каких условиях два разбиения одного и того же множества равны?

3.6. Упражнения и задачи

1. Доказать, используя (3.1), для произвольных множеств $A,B,C\in\Re(\boldsymbol{E})$ справедливость равенств

1) $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$;

2) $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$;

3) $A\backslash(B\cup C) = (A\backslash B)\cap (A\backslash C)$;

4) $A\backslash(B\cap C)=(A\backslash B)\cup(A\backslash C)$;

5) $\overline{(C\setminus A)\cap(C\setminus B)} = A\cup B\cup\overline{C}$;

7) $A\cup B=(A\cap B)\cup(A\Theta B)$.

8) $(A\cup B)\cap(C\cup D) = (A\cap C)\cup(A\cap D)\cup(B\cap C)\cup(B\cap D)$;

9) $A\backslash B = A\cap\ \overline{B}$;

10) $A\Theta(A\Theta B) = B$;

11) $A\cup B = A\Theta B\Theta(A\cap B)$;

12) $A\cup B = (A\Theta B)\cup(A\cap B)$;

13) $A\backslash(A\backslash(A\backslash B)) = A\backslash B$;

14) $A\backslash(A\backslash(A\backslash(A\backslash B))) = A\cap B$.

2. Доказать, используя метод от противного, следующие равенства для произвольных множеств A,B,C из $\Re(\boldsymbol{E})$:

1) $A\cap \overline{A} = \varnothing$;

2) $A\Theta A = \varnothing$;

3) $A\cap(B\backslash A) = \varnothing$;

4) $(A\backslash B)\backslash(A\cap \overline{B}) = \varnothing$;

5) $((A\cup B)\backslash(A\cap B))\backslash(A\Theta B) = \varnothing$;

6) $((A\cap B)\cup(A\cap \overline{B}))\backslash A = \varnothing$.

4. ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ

4.1. Определение прямого произведения множеств

Пусть даны n произвольных множеств M_1, M_2,..., M_n из $\Re(\boldsymbol{E})$. Прямым или декартовым произведением множеств M_1, M_2,..., M_n называется и через $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ обозначается множество, элементами которого являются все возможные наборы вида $<x_1,x_2,\ldots,x_n>$, причем $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$,..., $x_n \in M_n$. Поскольку порядок элементов в таком наборе существен, т.е. на первом месте ставится обязательно элемент из M_1 , на втором - из M_2 и т.д., на месте n элемент из M_n, то такие наборы называют упорядоченными или n-ками. Иногда n-ки называют кортежами или векторами длины n. Если n=2, то n-ки называются упорядоченными парами, при n=3- упорядоченными тройками и т.д.

Иначе говоря, для произвольной n-ки $<x_1,x_2,\ldots x_n>$, принадлежащей прямому произведению множеств, истинно высказывание

$$<x_1,x_2,\ldots,x_n> \in M_1 \times M_2 \ldots \times M_n \leftrightarrow x_1 \in M_1 \& x_2 \in M_2 \& \ldots \& x_n \in M_n, \qquad (4.1)$$

а для n-ки, не принадлежащей прямому произведению множеств, на основании (2.6) истинно

$$<y_1,y_2,\ldots,y_n> \notin M_1 \times M_2 \ldots \times M_n \leftrightarrow y_1 \notin M_1 \vee y_2 \notin M_2 \vee \ldots \vee y_n \notin M_n. \qquad (4.2)$$

Из (4.1)следует, что

$$M_1 \times M_2 \ldots \times M_n = \varnothing \leftrightarrow M_1 = \varnothing \vee M_2 = \varnothing \vee \ldots \vee M_n = \varnothing.$$

Две n-ки $<x_1,x_2,\ldots,x_n>$ и $<y_1,y_2,\ldots,y_n>$ равны, если $x_1=y_1$, $x_2=y_2$,..., $x_n=y_n$, т.е. элементы, стоящие на одинаковых местах, равны.

Если $|M_1|=m_1$, $|M_2|=m_2$,..., $|M_n|=m_n$, то нетрудно видеть, что $|M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n| = m_1\, m_2 \cdot \ldots\, m_n$.

Пример. Пусть множества $A=\{a,b\}$, $B=\{3,5,7\}$, $C=\{\gamma,\beta\}$. Тогда $A \times B \times C=\{<a,3,\gamma>, <a,3,\beta>, <a,5,\gamma>, <a,5,\beta>, <a,7,\gamma>, <a,7,\beta>, <b,3,\gamma>, <b,3,\beta>, <b,5,\gamma>, <b,5,\beta>, <b,7,\gamma>, <b,7,\beta>,\}$.
Как видим, элементами множества $A \times B \times C$ являются упорядоченные тройки.

Если $M_1=M_2=\ldots=M_n=M$, то $\underbrace{M \times M \times \ldots \times M}_{\text{n раз}} = M^n$, причем $|M^n|=m^n$, где $|M|=m$. Полагая, что $M^1=M$, а $M^0=\varnothing$, приходим к определению n-ой степени произвольного множества M при любом n.

4.2. Прямое произведение двух множеств

Наибольший интерес для дальнейшего изложения представляет прямое произведение двух произвольных множеств X и Y, которое является частным случаем определенного выше прямого произведения n множеств.

Для произвольной упорядоченной пары $<x,y>$ истинно высказывание

$$<x,y> \in X \times Y \leftrightarrow x \in X \& y \in Y. \quad (4.3)$$

Если существует упорядоченная пара $<a,b>$, не принадлежащая $X\times Y$, то для нее истинно

$$<a,b> \notin X \times Y \leftrightarrow a \notin X \vee b \notin Y \leftrightarrow (a \notin X \& b \in Y) \vee (a \in X \& b \notin Y) \vee (a \notin X \& b \notin Y). \quad (4.4)$$

Из (4.3) легко видеть, что $X\times Y=\varnothing \leftrightarrow X=\varnothing \vee Y=\varnothing$.

Подмножества множества $X\times Y$ иногда называют графиками. Вообще говоря, графиком называют любое множество, элементами которого являются упорядоченные пары.

Пусть M - произвольное множество из $\Re(\boldsymbol{E})$. Подмножество $\Delta_M \subseteq M^2$ называется диагональю множества M, если оно состоит из пар вида $<x,x>$, где $x \in M$. Например, если $M= \{e, f, k, d\}$, то $\Delta_M=\{<e,e>, <f,f>, <k,k>, <d,d>\}$.

Рассмотрим свойства прямого произведения двух множеств.

Пусть $X,Y,Z,W \in \Re(\boldsymbol{E})$. Тогда справедливы соотношения

- некоммутативность:

$$X\times Y \neq Y\times X, \quad (4.5)$$

- ассоциативность с точностью до порядка расстановки скобок:

$$X\times(Y\times Z) = (X\times Y)\times Z = X\times Y\times Z, \quad (4.6)$$

- левая и правая дистрибутивности $\times$ относительно $\cup$:

$$\left.\begin{aligned} X\times(Y\cup Z) = (X\times Y)\cup(X\times Z) \\ (Y\cup Z)\times X = (Y\times X)\cup(Z\times X) \end{aligned}\right\}, \quad (4.7)$$

- левая и правая дистрибутивности $\times$ относительно $\cap$:

$$\left.\begin{aligned} X\times(Y\cap Z) = (X\times Y)\cap(X\times Z) \\ (Y\cap Z)\times X = (Y\times X)\cap(Z\times X) \end{aligned}\right\}, \quad (4.8)$$

- левая и правая дистрибутивности $\times$ относительно \:

$$\left.\begin{aligned} X\times(Y\setminus Z)=(X\times Y)\setminus(X\times Z)\\ (Y\setminus Z)\times X=(Y\times X)\setminus(Z\times X)\end{aligned}\right\}, \qquad (4.9)$$

- левая и правая дистрибутивности x относительно Θ:

$$\left.\begin{aligned} X\times(Y\Theta Z)=(X\times Y)\Theta(X\times Z)\\ (Y\Theta Z)\times X=(Y\times X)\Theta(Z\times X)\end{aligned}\right\}, \qquad (4.10)$$

$$(X\times Y)\cap(W\times Z) = (X\cap W)\times(Y\cap Z). \qquad (4.11)$$

Свойства (4.5) и (4.6) непосредственно следуют из определения прямого произведения и равенства множеств.

Поскольку в результате прямого произведения получаем множества, элементами которых являются пары, то для доказательства свойств (4.7) - (4.11) используются методы доказательства равенств с множествами.

Докажем, к примеру, (4.10), используя метод взаимного включения.

Пусть для произвольной пары $<a,b>$ истинно $<a,b>\in X\times(Y\Theta Z)$. Покажем, что из этого следует $<a,b>\in(X\times Y)\Theta(X\times Z)$. Действительно,

$$\begin{aligned}&<a,b>\in X\times(Y\Theta Z)\leftrightarrow a\in X\ \&\ b\in Y\Theta Z)\leftrightarrow a\in X\ \&\ (b\in Y\ \&\ b\notin Z\vee b\notin Y\ \&\ b\in Z)\leftrightarrow\\ &(a\in X\ \&\ b\in Y\ \&\ b\notin Z)\vee(a\in X\ \&\ b\notin Y\ \&\ b\in Z)\leftrightarrow(a\in X\ \&\ b\in Y\ \&\ a\in X\ \&\ b\notin Z)\vee\\ &\vee(a\in X\ \&\ b\notin Y\ \&\ a\in X\ \&\ b\in Z)\leftrightarrow<a,b>\in X\times Y\&<a,b>\notin X\times Z\vee\\ &\vee<a,b>\notin X\times Y\&<a,b>\in X\times Z\leftrightarrow<a,b>\in(X\times Y)\Theta(X\times Z).\end{aligned}$$

Мы показали, что $X\times(Y\Theta Z)\subseteq(X\times Y)\Theta(X\times Z)$. Учитывая, что у нас везде стоят эквивалентные преобразования, мы тем самым доказали, что справедливо и включение $(X\times Y)\Theta(X\times Z)\subseteq X\times(Y\Theta Z)$. Отсюда следует, что свойство (4.10) доказано.

4.3. Проектирование и инверсия множеств

Определим теперь операцию проектирования множеств. Пусть задано произвольное подмножество A прямого произведения множеств X и Y, т.е. $A\subseteq X\times Y$ и $<a,b>$ - произвольный элемент A. Операция выделенная первого или второго элемента пары $<a,b>$ называется проектированием пары и в зависимости от выделенного элемента обозначается

$$pr_1<a,b>=a,\quad pr_2<a,b>=b,$$

а элементы a и b называются соответственно первой и второй проекцией пары $<a,b>$. Операция проектирования естественно распространяется на множество A, состоящее из пар. Множество первых проекций всех пар из A называется первой проекцией множества A и обозначается pr_1A. Аналогично, множество вторых проекций всех пар из A называется второй проекцией множества A и обозначается pr_2A.

Пример. Если $A=\{<a,c>, <a,a>, <c,e>, <b,d>\}$, то $pr_1A=\{a,b,c\}$, $pr_2A=\{c,a,e,d\}$. Нетрудно видеть, что $pr_1\varnothing = pr_2\varnothing = \varnothing$.

Для произвольной упорядоченной пары $<a,b>$ истинно высказывание

$$<a,b>\in A \rightarrow a\in pr_1A \;\&\; b\in pr_2A. \qquad (4.13)$$

По закону контрапозиции из (4.13) получаем истинное высказывание

$$a\notin pr_1A \vee b\notin pr_2A \rightarrow <a,b>\notin A. \qquad (4.14)$$

Пусть $A\subseteq X\times Y$ и $B\subseteq X\times Y$. Нетрудно видеть, что $\forall a\in X$ и $\forall b\in Y$ высказывания

$$\left.\begin{array}{c} a\in pr_1A \rightarrow <a,b>\in A, \\ b\in pr_2A \rightarrow <a,b>\in A, \\ a\in pr_1A \,\&\, b\in pr_2A \rightarrow <a,b>\in A, \\ (pr_1A = pr_1B) \rightarrow A=B, \\ (pr_2A = pr_2B) \rightarrow A=B, \\ (pr_1A = pr_1B)\,\&\,(pr_2A = pr_2B) \rightarrow A=B. \end{array}\right\} \qquad (4.15)$$

в общем случае не являются истинными.

В то же время истинны высказывания

$$\left.\begin{array}{l} a\in pr_1A \leftrightarrow (\exists b\in Y)<a,b>\in A, \\ b\in pr_2A \leftrightarrow (\exists a\in X)<a,b>\in A, \\ a\in pr_1A \,\&\, b\in pr_2A \leftrightarrow (\exists c\in Y)(\exists d\in X)(<a,c>\in A \,\&\, <d,b>\in A. \end{array}\right\} \qquad (4.16)$$

Пример. Пусть $A=\{<a,b>, <c,d>, <k,f>\}$, $B=\{<a,f>, <c,b>, <k,d>\}$. Здесь $A\neq B$, однако $pr_1A = pr_1B = \{a,c,k\}$, $pr_2A = pr_2B = \{b,d,f\}$.

Рассмотрим свойства операции проектирования множеств. Пусть $X,Y\in\Re(\boldsymbol{E})$, а $A\subseteq X\times Y$ и $B\subseteq X\times Y$. Тогда имеют место

$$\left.\begin{aligned} pr_1(X\times Y)=X,\\ pr_2(X\times Y)=Y,\end{aligned}\right\} \qquad (4.17)$$

$$pr_1X^2=pr_2X^2=X, \qquad (4.18)$$

$$\left.\begin{aligned} pr_1(A\cup B)=pr_1A\cup pr_1B,\\ pr_2(A\cup B)=pr_2A\cup pr_2B.\end{aligned}\right\} \qquad (4.19)$$

Равенства (4.17), (4.18) следуют из определения операции проектирования. Равенства (4.19) могут быть доказаны любым способом доказательства равенств с множествами.

Докажем, к примеру, первое из равенства (4.19), используя метод взаимного включения.

Пусть для произвольного элемента a истинно $a\in pr_1(A\cup B)$. Тогда

$a\in pr_1(A\cup B) \leftrightarrow (\exists b\in Y)(<a,b>\in A\cup B) \leftrightarrow (\exists b\in Y)(<a,b>\in A\vee<a,b>\in B) \leftrightarrow (\exists b_1\in Y)(<a,b>\in A) \vee (\exists b_2\in Y)(<a,b>\in B) \leftrightarrow a\in pr_1A \vee a\in pr_1B \leftrightarrow a\in(pr_1A \cup pr_1B)$.

Необходимо отметить, что третий «переход» также является эквивалентностью, так как при переходе «слева направо» $b_1=b_2=b$, а при переходе «справа налево» хотя в общем случае такое равенство не выполняется, но между скобками стоит дизъюнкция. Первое равенство (4.19) доказано. Аналогично доказывается второе равенство (4.19).

В общем случае между операциями проектирования и пересечения множеств существует следующая взаимосвязь:

$$\left.\begin{aligned} pr_1(A\cap B)\subseteq pr_1A\cap pr_1B,\\ pr_2(A\cap B)\subseteq pr_2A\cap pr_2B.\end{aligned}\right\} \qquad (4.20)$$

Докажем справедливость первого соотношения (4.20). Пусть для произвольного элемента a истинно высказывание $a\in pr_1(A\cap B)$. Тогда

$a\in pr_1(A\cap B) \leftrightarrow (\exists b\in Y)(<a,b>\in A\cap B) \leftrightarrow (\exists b\in Y)(<a,b>\in A\&<a,b>\in B) \leftrightarrow (\exists b\in Y)(<a,b>\in A\&(\exists b\in Y)(<a,b>\in B)\rightarrow (\exists b_1\in Y)(<a,b>\in A\&(\exists b_2\in Y)(<a,b>\in B) \leftrightarrow a\in pr_1 A \;\&\; a\in pr_1B \leftrightarrow a\in(pr_1A\cap pr_1B)$.

Так как четвертый переход является импликацией, то включение показано.

Рассмотрим пример. Пусть множества $A=\{<a,b>, <b,c>\}$, и $B=\{<a,b>, <b,d>\}$. Определим значения $A\cap B = \{<a,b>\}$, $pr_1(A\cap B)=\{a\}$,

$pr_1(A)=\{a,b\}$, $pr_1(B)=\{a,b\}$, $pr_1A \cap pr_1B=\{a,b\}$. Следовательно, $pr_1(A\cap B) \subseteq pr_1A \cap pr_1B$.

Введем операцию инверсии непустого множества $A \subseteq X\times Y$, где $X,Y \in \Re(\boldsymbol{E})$. Пусть $<a,b>$ - произвольная упорядоченная пара из A.

Инверсией пары $<a,b>$ называется и через $<a,b>^{-1}$ обозначается пара $<b,a>$, у которой на первом месте стоит элемент $b\in Y$, а на втором - элемент $a\in X$. Инверсия множества A образуется, как инверсия всех его пар и обозначается A^{-1}. Поэтому для произвольной пары $<a,b>$ справедливо

$$<a,b>\in A \leftrightarrow <b,a>\in A^{-1}, \tag{4.21}$$

$$<a,b>\notin A \leftrightarrow <b,a>\notin A^{-1}. \tag{4.22}$$

Кроме того, для любого множества $A \subseteq X\times Y$ имеет место

$$(A^{-1})^{-1} = A, \tag{4.23}$$

$$pr_1A = pr_2A^{-1},\quad pr_2A = pr_1A^{-1}. \tag{4.24}$$

Доказательства выражений (4.23) и (4.24) вытекает из определений инверсии и проектирования множеств.

Множество A называется симметричным, если оно наряду с любой парой $<a,b>\in A$ содержит также пару $<b,a>$.

4.4. Композиция множеств

Рассмотрим теперь операцию композиции двух множеств $A \subseteq X\times Y$ и $B \subseteq W\times Z$. Множество C является композицией множеств A и B и обозначается $C = A\circ B$, если оно состоит из всех таких пар $<x, z>$, для которых $x\in X$, $z\in Z$ и существует такой элемент $b\in Y\cap W$, что $<a,b>\in A$ и $<b,z>\in B$. Очевидно, что при $Y\cap W=\varnothing$ множество $C=\varnothing$.

Например, пусть $A=\{<a,a>,<b,e>,<c,k>,<f,q>\}$, $B=\{<a,d>,<c,b>,<q,f>,<e,c>,<b,b>\}$.

Тогда $A\circ B=\{<a,d>,<b,c>,<f,f>\}$, а $B\circ A=\{<a,e>,<c,e>,<q,q>,<e,c>,<b,e>\}$.

Пусть $<x,z>$ произвольная пара из $A\circ B$.

Тогда для нее справедливо высказывание

$$<x,z>\in A\circ B \leftrightarrow (\exists b\in Y\cap W)\ (<x,b>\in A\ \&\ <b,z>\in B). \tag{4.25}$$

Если некоторая пара $<c,d>$ не принадлежит $A\circ B$, то по закону де Моргана и учитывая взаимосвязь кванторов общности и существования, получаем истинность высказывания

$<c,d> \notin A \circ B \leftrightarrow (\forall a \in Y \cap W)(<c,a> \notin A \vee <a,d> \notin B)$. (4.26)

В определении композиции элемент b называется компонирующим элементом для пар $<x,b> \in A$ и $<b,z> \in B$. Если множество компонирущих элементов пусто, то и результат композиции является пустым множеством. Таким образом,

$$A \circ B = \varnothing \leftrightarrow pr_2 A \cap pr_1 B = \varnothing.$$

Отсюда следует

$$A \circ \varnothing = \varnothing \circ A = \varnothing .$$

Операция композиции множеств обладает следующими свойствами

$A \circ B \neq B \circ A$ (некоммутативность) (4.27)

$A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C$, (ассоциативность) (4.28)

$\left. \begin{array}{l} A \circ (B \cup C) = (A \circ B) \cup (A \circ C) \\ (B \cup C) \circ A = (B \circ A) \cup (C \circ A) \end{array} \right\}$, (дистрибутивность относительно $\cup$) (4.29)

$(A \circ B)^{-1} = B^{-1} \circ A^{-1}$, (4.30)

$A \circ \Delta_A = \Delta_A \circ A = A$. (4.31)

Свойства (4.27), (4.28) и (4.31) следует из определения операции композиции, а свойства (4.29) и (4.30) могут быть доказаны методами доказательства равенств с множествами.

Докажем, например, первое равенство (4.29), используя метод взаимного включения. Пусть для произвольной пары $<a,b>$ истинно высказывание $< a,b > \in A \circ (B \cup C)$. Тогда

$$\begin{array}{l} < a,b > \in A \circ (B \cup C) \leftrightarrow (\exists z)(< a,z > \in A \& < z,b > \in (B \cup C)) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\exists z)(< a,z > \in A \& (< z,b > \in B \vee < z,b > \in C)) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\exists z)(< a,z > \in A \& < z,b > \in B \vee < a,z > \in A \& < z,b > \in C) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\exists z)(< a,z > \in A \& < z,b > \in B) \vee (\exists z)(< a,z > \in A \& < z,b > \in C) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\exists z_1)(< a,z_1 > \in A \& < z_1,b > \in B) \vee (\exists z_2)(< a,z_2 > \in A \& < z_2,b > \in C) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow < a,b > \in A \circ B \vee < a,b > \in A \circ C \leftrightarrow < a,b > \in A \circ B \cup A \circ C. \end{array}$$

В общем случае между операциями композиции и пересечения множеств существуют следующие соотношения:

$$\left. \begin{array}{l} A \circ (B \cap C) \subseteq (A \circ B) \cap (A \circ C); \\ (B \cap C) \circ A \subseteq (B \circ A) \cap (C \circ A). \end{array} \right\} \quad (4.32)$$

Докажем справедливость первого соотношения (4.32). Пусть для произвольной пары $<a,b>$ истинно высказывание $<a,b>\in A\circ(B\cap C)$. Тогда

$$< a,b >\in A\circ(B\cap C)\leftrightarrow(\exists z)(< a,z >\in A\& < z,b >\in(B\cap C))\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(\exists z)(< a,z >\in A\&(< z,b >\in B\& < z,b >\in C))\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(\exists z)(< a,z >\in A\& < z,b >\in B\& < a,z >\in A\& < z,b >\in C)\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(\exists z)(< a,z >\in A\& < z,b >\in B)\&(\exists z)(< a,z >\in A\& < z,b >\in C)\rightarrow$$
$$\rightarrow(\exists z_1)(< a,z_1 >\in A\& < z_1,b >\in B)\&(\exists z_2)(< a,z_2 >\in A\& < z_2,b >\in C)\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow< a,b >\in A\circ B\& < a,b >\in A\circ C\leftrightarrow< a,b >\in A\circ B\cap A\circ C.$$

Учитывая, что не везде переходы происходят с помощью операций эквивалентности, первое соотношение (4.32) доказано.

Рассмотрим пример, подтверждающий операцию включения в первом соотношении (4.32). Пусть множества $A=\{<a,z_1>,<a,z_2>\}$, $B=\{<z_1,b>\}$, $C=\{<z_2,b>\}$. Определим множества, стоящие в первой и правой части первого соотношения (4.32): $B\cap C=\varnothing$, $A\circ(B\cap C)=\varnothing$, $A\circ B=\{<a,b>\}$, $A\circ C=\{<a,b>\}$, $A\circ B\cap A\circ C=\{<a,b>\}$. Т.е. слева стоит $\varnothing$, а справа - $\{<a,b>\}$.

4.5. Контрольные вопросы

1. Как образуется прямое произведение n множеств?
2. В каком случае число элементов прямого произведения множеств равняется нулю?
3. В каком случае упорядоченная пара не принадлежит прямому произведению двух множеств? Запишите ответ в виде высказывания.
4. Когда мощность $|\Delta_M| = |M|$?
5. Для каких множеств A и B справедливо $X\times Y = Y\times X$?
6. Равны ли множества $pr_1A\cup pr_2A$ и A, если $A\subseteq X\times Y$?
7. Что такое инверсия множества A?
8. Для какого множества $A\subseteq X\times Y$ справедливо $A=A^{-1}$?
9. В каком случае существует композиция двух произвольных множеств A и B?
10. Когда $A\circ B=B\circ A$?
11. В каких случаях $A\circ B=A$?

4.6. Упражнения и задачи

1. Найти прямое произведение множеств X и Y, если

1) $X=\{\{a,b\}, a, \{d,e,f\}\}$, $Y=\{g,f\}$;

2) $X=\{1,2,3\}$, $Y=\varnothing$;

3) $X=\{2, \alpha, 8\}$, $Y=\{\{\varnothing\}, y_1, y_2\}$.

2. Найти n-ю степень множества X, если

1) $n=5$, $X=\{x\}$;

2) $n=3$, $X=\{x,y\}$;

3) $n=3$, $X=\{\{\varnothing\}\}$.

3. Доказать или опровергнуть, что для произвольных множеств $X,Y,Z,W\in\Re(\boldsymbol{E})$ справедливы следующие равенства и включения:

1) $X\times(Y\cup Z) = (X\times Y)\cup(X\times Z)$;

2) $X\times(Y\cap Z) = (X\times Y)\cap(X\times Z)$;

3) $X\times(Y\setminus Z) = (X\times Y)\setminus(X\times Z)$;

4) $(X\times Y)\cup(W\times Z) \subseteq (X\cup W)\times(Y\cup Z)$;

5) $(X\cup Y)\times(W\cup Z) = (X\times W)\cup(Y\times W)\cup(X\times Z)\cup(Y\times Z)$;

4. Доказать или опровергнуть, что для множеств A, B, C, где $A\subseteq X\times Y$, $B\subseteq X\times Y$, $C\subseteq X\times Y$, причем $X,Y\in\Re(\boldsymbol{E})$, выполняются следующие равенства:

1) $pr_1(A\setminus B) = pr_1A\setminus pr_1B$;

2) $pr_1(A\Theta B) = pr_1A\Theta pr_1B$;

3) $pr_1(A\cup B)^{-1} = pr_2A\cup pr_2B$;

4) $pr_1(A\cup B) = pr_2A^{-1}\cup pr_2B^{-1}$;

5) $pr_1(A\setminus B)^{-1} = pr_2A\setminus pr_2B$;

6) $(A\cup B)^{-1} = A^{-1}\cup B^{-1}$;

7) $(A\cap B)^{-1} = A^{-1}\cap B^{-1}$;

8) $(A\setminus B)^{-1} = A^{-1}\setminus B^{-1}$;

9) $(A\Theta B)^{-1} = A^{-1}\Theta B^{-1}$;

10) $(B\cup C)\circ A = (B\circ A)\cup(C\circ A)$;

11) $A\circ(B\setminus C) = (A\circ B)\setminus(A\circ C)$;

12) $A\circ(B\Theta C) = (A\circ B)\Theta(A\circ C)$.

5. СООТВЕТСТВИЯ

5.1. Определение и способы задания соответствий

Соответствием, или отношением между множествами X и Y, называется и через $\Gamma=(X,Y,F)$ обозначается тройка множеств, в которой X, Y произвольные множества из $\Re(\boldsymbol{E})$, а F является подмножеством прямого произведения множеств X и Y, т.е. $F\subseteq X\times Y$. В соответствии Г множество X называют областью отправления, множество Y - областью прибытия, а F - графиком соответствия. Кроме того, множество pr_1F называется областью определения, а pr_2F- областью значений соответствия. Из определения проекций следует, что $pr_1\subseteq X$, а $pr_2\subseteq Y$.

Если хотя бы одно из множеств X или Y равно пустому множеству, то такое соответствие будем называть пустым и обозначать Λ.

Два соответствия $\Gamma=(X,Y,F)$ и $\Delta=(Z,W,P)$ называются равными, если $X=Z$, $Y=W$ и $F=P$.

Существует несколько эквивалентных способов задания соответствий: теоретико-множественный, матричный и графический.

Теоретико-множественное задание соответствия полностью вытекает из определения. Для его задания необходимо определить множества $X=\{x_i\}$, $i\in I=\{1,2,...,n\}$, $Y=\{y_j\}$, $j\in J=\{1,2,...,m\}$ и график $F=\{<x_i, y_j>\}$, $x_i\in X$, $y_j\in Y$.

В матричном виде соответствие Г задается с помощью матрицы инциденций $R_г$, представляющую собой прямоугольную таблицу размером $n\times m$. В ней строки помечены элементами $x_i\in X$, столбцы - элементами $y_j\in Y$, а на пресечении x_i строки и y_j столбца ставится элемент $r_{ij}=1$, если $<x_i, y_j>\in F$ и $r_{ij}=0$, если $<x_i, y_j>\notin F$.

Графически соответствие как отношение между множествами можно задавать с помощью рисунка, на котором все элементы $x_i\in X$ изображаются расположенными в линию кружками, элементы $y_j\in Y$ - кружками, расположенными в другую линию, а каждая пара $<x_i,y_j>\in F$ стрелкой, идущей от кружка, обозначающего элемент x_i, к кружку, обозначающему элемент y_j. Такое представление называется графом, кружки - вершинами графа, а стрелки - дугами, соединяющими вершины.

Пример. Зададим некоторое соответствие Г=(X,Y,F), определив множества X, Y и F следующим образом: $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. $Y=\{y_1, y_2, y_3\}$, а $F=\{<x_1,y_2>, <x_2,y_1>, <x_2,y_2>, <x_4,y_1>, <x_4, y_2>,<x_4, y_3>\}$. В данном соответствии область определения $pr_1F=\{x_1, x_2, x_4\}$, а область значений $pr_2F=Y=\{y_1, y_2, y_3\}$. Матрица инциденций $R_{\text{г}}$ данного соответствия имеет вид

$$R_{\Gamma} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix} \\ \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| \end{array}$$

Граф соответствия *Г* приведен на рис. 5.1. Как видно, область определения образуется теми $x \in X$, из которых выходит, а область значений - теми $y \in Y$, в которые заходит хотя бы одна дуга. Аналогично, в матрице инциденций $R_{\text{г}}$ области определения соответствует множество ненулевых строк, а области значений - множество ненулевых столбцов .

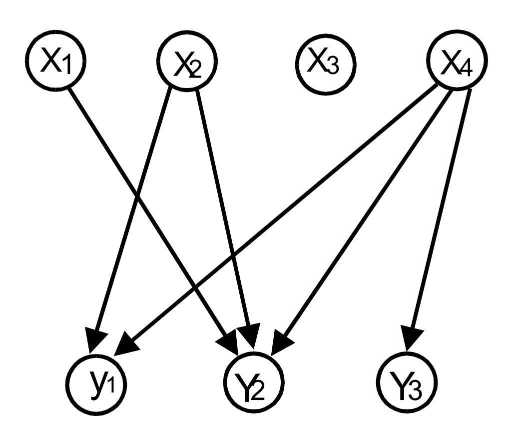


Рис.5.1.

Следует заметить, что в соответствии Г элементы $y \in Y$ соответствуют элементам $x \in X$, но не наоборот .

На данных множествах X и Y можно рассматривать семейство различных соответствий, начиная от соответствия с пустым графиком $F=\varnothing$, которому сопоставляется нулевая $R_{\text{г}}$, и кончая соответствием с графиком $F=X \times Y$, называемым полным, и которому сопоставляется матрица $R_{\text{г}}$ со всеми единицами. Следовательно, число различных соответствий Г на данных множествах $X=\{x_i\}$ и $Y=\{y_j\}$ совпадает с числом различных $n \times m$ матриц из нулей и единиц и, как известно, не превышает 2^{nm}.

Соответствие $\Gamma=(X,Y,F)$, у которого $F=\varnothing$, будем называть соответствием с пустым графиком и обозначать $\Gamma_{\varnothing}$, а соответствие, у которого $F=X\times Y$, будем называть соответствием с полным графиком и обозначать $\Gamma_{nm.}$

5.2. Операции над соответствиями

Рассмотрим операции объединения, пересечения, разности и симметрической разности соответствий. Пусть $X,Y,Z,W\in\Re(\boldsymbol{E})$ и $\Gamma=(X,Y,F)$, $\Delta=(Z,W,P)$ - произвольные соответствия.

Объединением соответствий Г и Δ называется соответствие, определяемое как $\Gamma\cup\Delta=(X\cup Z,Y\cup W,F\cup P)$.

Пересечением соответствий Г и Δ называется соответствие, определяемое как $\Gamma\cap\Delta=(X\cap Z, Y\cap W, F\cap P)$.

Разностью соответствий Г и Δ называется соответствие, определяемое как $\Gamma\backslash\Delta=(X\backslash Z, Y\backslash W, F\backslash P)$.

Заметим, что из графика $F\backslash P$ необходимо исключить пары, не являющиеся элементами множества $(X\backslash Z)\times(Y\backslash W)$.

Симметрической разностью соответствий Г и Δ называется соответствие, определяемое как $\Gamma\Theta\Delta=(X\Theta Z, Y\Theta W, F\Theta P)$. Аналогично из графика $F\Theta P$ необходимо удалить пары, не принадлежащие множеству $(X\Theta Z)\times(Y\Theta W)$.

Говорят, что соответствие $\Gamma=(X,Y,F)$ включается в соответствие $\Gamma'=(X',Y',F')$, если $X\subseteq X'$, $Y\subseteq Y'$ и $F\subseteq F'$. Включение соответствий обозначается $\Gamma\subseteq\Gamma'$.

Если $\Gamma\subseteq\Gamma'$ то дополнением соответствия Г до Г′ является соответствие $\overline{\Gamma}=(X',Y',F'\backslash F)$. Когда для произвольного соответствия $\Gamma=(X,Y,F)$ не оговорено, до какого соответствия берется дополнение $\overline{\Gamma}$, то имеется в виду, что оно берется до соответствия с полным графиком Γ_{nm}.

Примеры. Пусть даны соответствия Г и Δ, показанные на рис. 5.2.

Тогда $\Gamma=(X,Y,F)$, $X=\{x_1, x_2, x_3\}$, $Y=\{y_1, y_2\}$, $F=\{<x_1, y_1>, <x_2, y_1>, <x_2, y_2>, <x_3, y_1>\}$, $\Delta=(Z,W,P)$, $Z=\{x_1, x_2, x_3\}$, $W=\{y_1, y_2, y_3\}$, $P=\{<x_1,y_2>, <x_2,y_2>, <x_2,y_3>\}$.

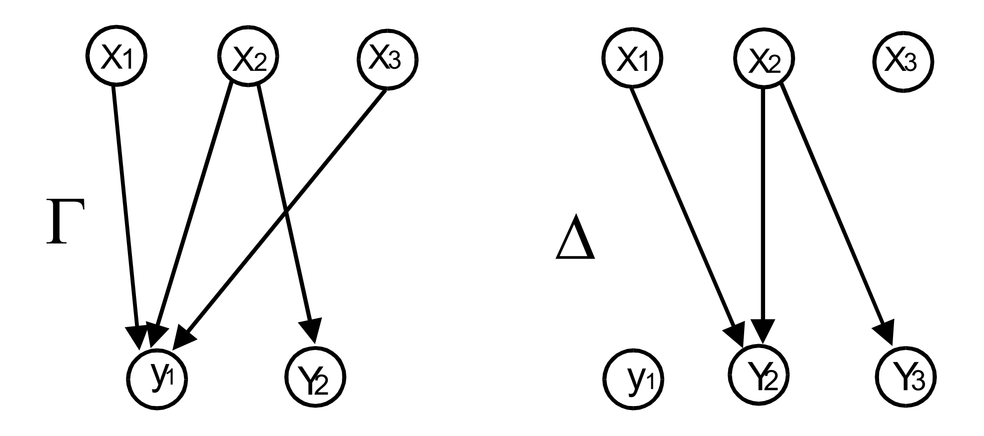


Рис.5.2. Графы соответствий Г и Δ

Определим $\Gamma \cup \Delta = (X \cup Z,\ Y \cup W,\ F \cup P)$.
$X \cup Z = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y \cup W = \{y_1, y_2, y_3\}$,
$F \cup P = \{\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle, \langle x_3, y_1\rangle, \langle x_1, y_2\rangle, \langle x_2, y_3\rangle\}$.
Граф соответствия $\Gamma \cup \Delta$ приведен на Рис.5.3:

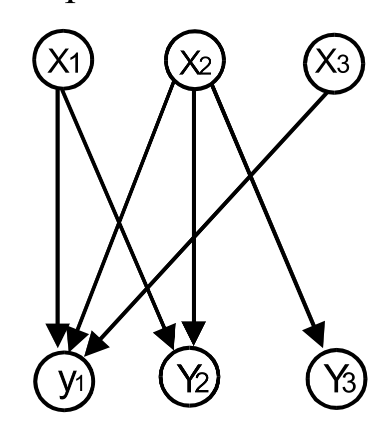


Рис.5.3. Граф соответствия $\Gamma \cup \Delta$

Запишем $\Gamma \cap \Delta = (X \cap Z,\ Y \cap W,\ F \cap P)$. $X \cap Z = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y \cap W = \{y_1, y_2\}$, $F \cap P = \{\langle x_2, y_2\rangle\}$.

Граф соответствия $\Gamma \cap \Delta$ приведен на Рис.5.4:

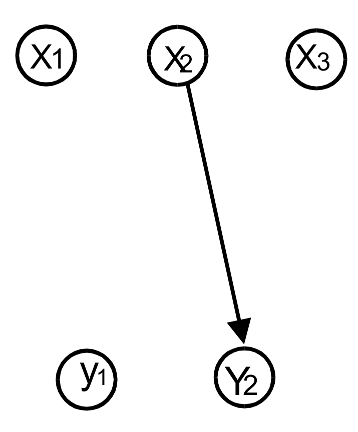


Рис.5.4. Граф соответствия $\Gamma \cap \Delta$

Найдем $\Gamma\backslash\Delta=(X\backslash Z,\ Y\backslash W,\ F\backslash P)$, $X\backslash Z=\varnothing$, $Y\backslash W=\varnothing$, $F\backslash P=\varnothing$. Поэтому $\Gamma\backslash\Delta=\Lambda$.

Получим $\Gamma\Theta\Delta=(X\Theta Z,\ Y\Theta W,\ F\Theta P)$, $X\Theta Z=\varnothing$, $Y\Theta W=\{y_3\}$, $F\Theta P=\varnothing$. Поэтому $\Gamma\Theta\Delta=\Lambda$.

Построим $\overline{\Gamma}=(X,Y,(X\times Y)\backslash F)$, $X=\{x_1,x_2,x_3\}$, $Y=\{y_1,y_2\}$, $(X\times Y)\backslash F=\overline{F}=\{<x_1,y_2>,<x_3,y_2>\}$.

Граф соответствия $\overline{\Gamma}$ приведен на Рис.5.5:

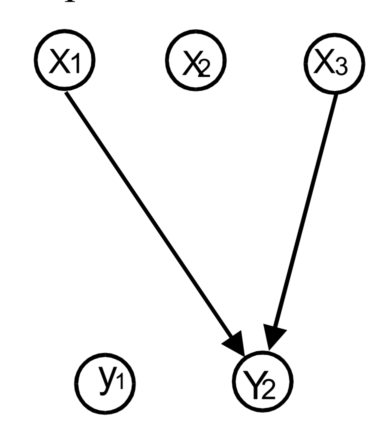


Рис.5.5. Граф соответствия $\overline{\Gamma}$

По аналогии с понятиями, рассмотренными в п.4.4 для подмножеств прямого произведения двух множеств, определяются понятия инверсии и композиции соответствий.

Инверсией соответствия $\Gamma=(X,Y,F)$ называется соответствие $\Gamma^{-1}=(X,Y,F^{-1})$, у которого график F^{-1} является инверсией графика F, причем $F^{-1}\subseteq Y\times X$, Y - областью отправления, а X - областью прибытия.

Композицией соответствий $\Gamma=(X,Y,F)$ и $\Delta=(Z,W,P)$ называется соответствие $\Gamma\circ\Delta=(X,W,F\circ P)$, у которого область отправления совпадает с областью отправления соответствия Γ, область прибытия - с областью прибытия соответствия Δ, а графиком является композиция графиков F и P. Если $Y\cap Z$ равно пустому множеству, то в результате композиции соответствий получаем соответствие с пустым графиком.

Пример. Пусть даны соответствия $\Gamma=(X,Y,F)$, $X=\{x_1, x_2, x_3\}$, $Y=\{y_1, y_2\}$, $F=\{<x_1,y_1>,<x_2,y_2>, <x_3,y_1>, <x_3,y_2>\}$ и $\Delta=(Z, W, P)$, $Z=\{y_1, y_2, y_3\}$, $W=\{w_1, w_2, w_3\}$, $P=\{<y_1,w_1>, <y_1,w_3>, <y_2,w_1>,<y_2,w_2>,<y_3,w_2>\}$, графы которых показаны на рис 5.6.

Построим соответствия

$\Gamma^{-1}=(X,Y,F^{-1})$, где $X=\{x_1, x_2, x_3\}$, $Y=\{y_1, y_2\}$, $F^{-1}=\{<y_1,x_1>, <y_2,x_2>, <y_1,x_3>, <y_2, x_3>\}$ и $\Gamma\circ\Delta=(X, W, F\circ P)$, где $X=\{x_1, x_2, x_3\}$, $W=\{w_1, w_2, w_3\}$, $F\circ P=\{<x_1,w_1>, <x_1,w_3>, <x_2,w_1>, <x_2,w_2>, <x_3,w_1>, <x_3,w_2>, <x_3,w_3>\}$.

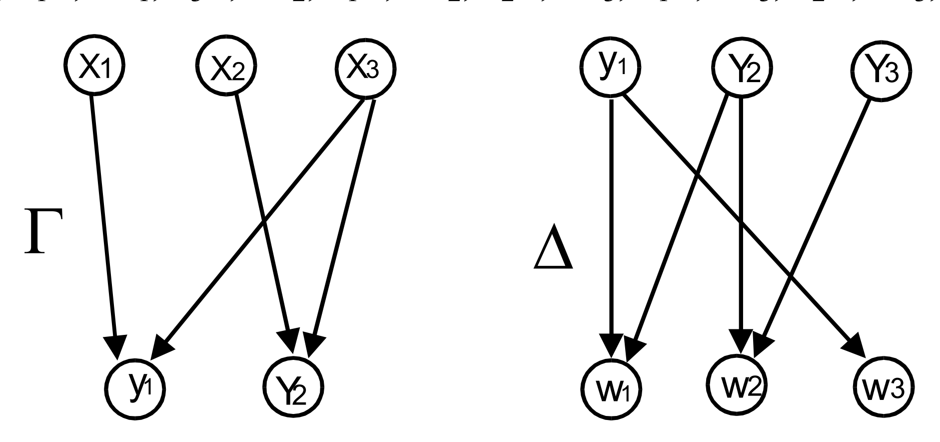


Рис.5.6. Графы соответствий Г и Δ

Графы соответствий Γ^{-1} и $\Gamma\circ\Delta$ показаны на рис.5.7 и 5.8.

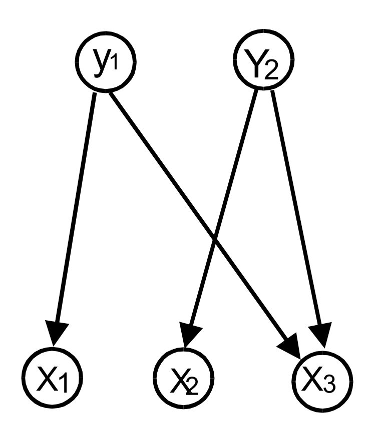


Рис.5.7. Граф соответствия Γ^{-1}

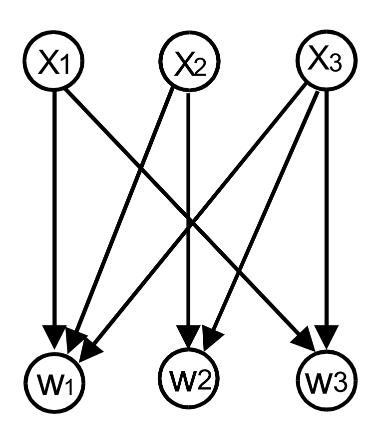


Рис.5.8. Граф соответствия $\Phi=\Gamma\circ\Delta$

Нетрудно видеть, что инверсия соответствия графически получается изменением направления каждой дуги на противоположное.

Операции инверсии и композиции, так же, как и рассмотренные выше, могут быть выполнены с матрицами инциденций соответствий.

Если $R_Г$ - матрица инциденций соответствия Г, то легко видеть, что матрица инциденций $R_{Г-1}$ получается транспонированием матрицы $R_Г$, т.е. $R^t_Г=R_{Г-1}$.

Если $R_Г$ и R_Δ - матрицы инциденций соответствий $Г=(X,Y,F)$, и $\Delta=(Z,W,P)$ таких, что $Y=Z$, причем $X=\{x_i\}$, $i\in I=\{1,2,...,n\}$, $Y=\{y_j\}$, $j\in J=\{1,2,...,m\}$, $W=\{w_k\}$, $k\in L=\{1,2,...,l\}$, то матрица инциденций $R_Ф=R_Г \bullet R_\Delta$, где $Ф=Г\bullet\Delta$, получается в результате умножения матрицы $R_Г$ на R_Δ, в котором вместо умножения используется конъюнкция, а вместо сложения - дизъюнкция. Это возможно, так как элементы матриц инциденций принимают только два значения: 0 и 1. Иначе говоря, если $R_Г=\|a_{ij}\|_{n\times m}$, а $R_\Delta=\|b_{jk}\|_{m\times l}$, то $R_Ф=\|r_{ik}\|_{n\times l}$, где $r_{ik}=\vee_j a_{ij}\,\&\,b_{jk}$, $i\in I$, $j\in J$, $k\in L$. В случае, когда $Y\neq Z$, а $Y\cap Z=U$, то из матрицы $R_Г$ необходимо предварительно исключить строки, а из матрицы R_Δ - столбцы, не помеченные элементами из U. Далее выполняется описанная выше процедура.

Для соответствий, показанных на рис. 5.6., запишем матрицы инциденций:

$$R_Г=\begin{matrix} & y_1 & y_2 \\ x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \\ x_3 & 1 & 1 \end{matrix}, \qquad R_\Delta=\begin{matrix} & w_1 & w_2 & w_3 \\ y_1 & 1 & 0 & 1 \\ y_2 & 1 & 1 & 0 \\ y_3 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}.$$

Матрица $R_Г^{Т}=R_Г^{-1}$ имеет вид

$$R_{Г^{-1}}=\begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & 1 & 0 & 1 \\ y_2 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}.$$

Поскольку для соответствий Г и Δ множество $Y\cap Z=\{y_1, y_2\}$, то из матрицы R_Δ удаляем строку y_3. Получаем R'_Δ.

$$R'_\Delta=\begin{matrix} & w_1 & w_2 & w_3 \\ y_1 & 1 & 0 & 1 \\ y_2 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}.$$

Выполняя $R_Г \circ R'_\Delta$, получаем $R_Ф$.

$$R_{\Phi} = \begin{matrix} & w_1 & w_2 & w_3 \\ x_1 & 1 & 0 & 1 \\ x_2 & 1 & 1 & 0 \\ x_3 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}.$$

Элемент r_{21} матрицы R_{Φ} образуется, например, как

$r_{21}=a_{21} \,\&\, b'_{11} \vee a_{22} \,\&\, b'_{21}=0\&1 \vee 1\&1=1.$

Свойства операций над соответствиями подобны свойствам операций над множествами, элементами которых являются упорядоченные пары. Поэтому специально останавливаться на них не будем.

5.3. Образ и прообраз множества при данном соответствии

Рассмотрим понятия образа и прообраза, характерных для соотношений между множествами.

Пусть дано соответствие $\Gamma=(X,Y,F)$. Образом элемента $x\in X$ при соответствии Γ называется и через $\Gamma(x)$ обозначается множество элементов $y\in Y$, для которых пара $<x,y>\in F$. Иначе говоря,

$$\Gamma(x) = \{y\in Y \mid <x,y>\in F\},$$

т.е. это множество тех элементов из Y, которые соответствуют элементу x.

Иногда множество $\Gamma(x)$ называется сечением соответствия Γ по элементу x.

На графе образ элемента x можно представить как множество тех вершин, в которые входят дуги, выходящие из вершины x.

В матрице инциденций R_{Γ} соответствия Γ образом элемента x являются элементы, помечающие те столбцы, на пересечении которых со строкой x стоят единицы.

Как следует из определения образа,

$$\Gamma(x)=\mathrm{pr}_2((\{x\}\times Y)\cap F). \qquad (5.1)$$

Образ любого множества $A\subseteq X$ при соответствии $\Gamma=(X,Y,F)$ естественно представляет собой объединение образов всех элементов $x\in A$ и обозначается $\Gamma(A)$. Иначе говоря,

$$\Gamma(A) = \bigcup_{x\in A} \Gamma(x).$$

Из данного определения (5.1), (4.19) и свойств операций над множествами вытекает

$$\Gamma(A)=\mathrm{pr}_2((A\times Y)\cap F). \qquad (5.2)$$

Пример. Пусть дано соответствие $\Gamma=(X,W,S)$, показанное на рис.5.8. Если множество А=$\{x_2, x_3\}$, то $\Gamma(A)=\Gamma(x_2)\cup\Gamma(x_3) = \{w_1, w_2\}\cup\{w_1,w_2,w_3\} = \{w_1,w_2,w_3\}$.

Для образов множеств $A\subseteq X$ и $B\subseteq X$ при произвольном соответствии $\Gamma=(X,Y,F)$ справедливы следующие свойства:

$$A\subseteq B \rightarrow \Gamma(A)\subseteq\Gamma(B), \qquad (5.3)$$
$$\Gamma(A) = \Gamma(A\cap\mathrm{pr}_1F), \qquad (5.4)$$
$$\Gamma(A)=\varnothing \leftrightarrow A\cap\mathrm{pr}_1F=\varnothing, \qquad (5.5)$$
$$\Gamma(A) \subseteq \mathrm{pr}_2 F, \qquad (5.6)$$
$$\Gamma(\mathrm{pr}_1F)= \mathrm{pr}_2 F, \qquad (5.7)$$
$$\Gamma(\varnothing)=\varnothing, \qquad (5.8)$$
$$\Gamma(A\cup B)=\Gamma(A)\cup\Gamma(B). \qquad (5.9)$$

Если $\Gamma=(X,Y,F)$ и $\Delta=(Z,W,P)$ произвольные соответствия, а $\Phi=(X,W,S)$ - их композиция, то для $A\subseteq X$ имеет место

$$\Phi(A) = (\Gamma \circ \Delta)(A) = \Delta(\Gamma(A)). \qquad (5.10)$$

Выражения (5.3) - (5.10) могут быть доказаны на основании определения образа множества при данном соответствии и свойств прямого произведения множеств, рассмотренных в разделе 4.

Докажем, к примеру, (5.3) и (5.4).

Для доказательства (5.3) необходимо показать, что $\Gamma(A)\subseteq\Gamma(B)$ при условии

$$A \subseteq B. \qquad (5.11)$$

Используя (5.2), перейдем к доказательству выражения

$$\mathrm{pr}_2(A\times Y)\cap F \subseteq \mathrm{pr}_2(B\times Y)\cap F \qquad (5.12)$$

при том же условии.

Пусть истинно высказывание $b\in\mathrm{pr}_2(A\times Y)\cap F$.

Тогда

$b \in pr_2((A\times Y)\cap F) \leftrightarrow (\exists a \in X)(<a,b>\in (A\times Y)\cap F) \leftrightarrow (\exists a \in X)(<a,b>\in (A\times Y)\,\&$
$\& <a,b>\in F) \leftrightarrow (\exists a \in X)(a \in A \,\&\, b \in Y \& <a,b>\in F) \to (\exists a \in X)(a \in B \,\&\, b \in Y\,\&$
$\& <a,b>\in F) \leftrightarrow (\exists a \in X)(<a,b>\in B\times Y \& <a,b>\in F) \leftrightarrow (\exists a \in X)(<a,b>\in (B\times Y\cap F)) \leftrightarrow$
$\leftrightarrow b \in pr_2((B\times Y)\cap F).$

Итак, (5.12) и, следовательно, (5.3) доказано.

Для доказательства (5.4) нужно доказать включения

$$\Gamma(A) \subseteq \Gamma(A\cap \mathrm{pr}_1 F) \qquad (5.13)$$

и

$$\Gamma(A\cap \mathrm{pr}_1 F) \subseteq \Gamma(A). \qquad (5.14)$$

Используя (5.2), докажем, что $\mathrm{pr}_2(A\times Y)\cap F = \mathrm{pr}_2((A\cap \mathrm{pr}_1 F)\times Y)\cap F$. Пусть истинно высказывание $b\in \mathrm{pr}_2(A\times Y)\cap F$. Тогда

$b\in \mathrm{pr}_2\,(A\times Y)\cap F \leftrightarrow (\exists a\in X)[<a,\ b>\in(A\times Y)\cap F] \leftrightarrow (\exists a\in X)[<a,b>\in A\times Y\ \&$ $<a,b>\in F] \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\exists a\in X)(a\in A \& b\in Y\ \&\ a\in \mathrm{pr}_1 F\ \&\ <a,b>\in F) \leftrightarrow (\exists a\in X)(a\in A \& a\in \mathrm{pr}_1 F\ \&\ b\in Y \&\ <a,b>\in F) \leftrightarrow (\exists a\in X)\ (a\in A\cap \mathrm{pr}_1 F\ \&\ b\in Y \& <a,b>\in F) \leftrightarrow (\exists a\in X)$ $(<a,b>\in((A\cap \mathrm{pr}_1 F)\times Y) \& <a,b>\in F) \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\exists a\in X)(<a,b>\in((A\cap \mathrm{pr}_1 F)\times Y)\cap F) \leftrightarrow b\in \mathrm{pr}_2((A\cap \mathrm{pr}_1 F)\times Y)\cap F.$

Учитывая, что везде стоят эквивалентные преобразования, выражения (5.13) и (5.14) доказаны. Следовательно, (5.4) доказано.

Пусть дано соответствие $\Gamma=(X,Y,F)$. ***Прообразом*** элемента $y\in Y$ при соответствии Γ называется и через $\Gamma^{-1}(y)$ обозначается множество элементов из X, которым соответствует элемент y.

На графе прообраз элемента y можно представить множеством тех вершин, из которых выходят дуги, заходящие в вершину y.

В матрице инциденций R_Γ соответствия Γ прообразом элемента y являются элементы, помещающие те строки, на пересечении которых со столбцом y стоят единицы.

Как следует из определения прообраза,

$$\Gamma^{-1}(y) = \mathrm{pr}_1(X\times\{y\} \cap F). \qquad (5.15)$$

Прообразом произвольного множества $B\subseteq Y$ при соответствии $\Gamma=(X,Y,F)$ называется объединение прообразов всех элементов $y\in B$ и обозначается $\Gamma^{-1}(B)$, т.е.

$$\Gamma^{-1}(B) = \bigcup_{y\in B} \Gamma^{-1}(y).$$

По аналогии с (5.2) имеем

$$\Gamma^{-1}(B) = \mathrm{pr}_1(X\times B)\cap F. \qquad (5.16)$$

Пример. Для соответствия Ф (см.рис.5.8) прообразом множества $B=\{w_2,w_3\}$ будет являться $\Gamma^{-1}(B)= \Gamma^{-1}(w_2)\cup \Gamma^{-1}(w_3)=\{x_2, x_3\} \cup \{x_1, x_3\} = \{x_1, x_2, x_3\}$.

Как следует из определений образа и прообраза, образ множества *A* при данном соответствии совпадает с прообразом этого же множества при инверсии соответствия, и, наоборот, прообраз множества *A* при данном соответствии совпадает с образом этого же множества при инверсии соответствия. Отсюда естественно вытекает, что свойства, сформулированные для образа множества *A* при соответствии Г будут справедливы и для прообраза множества *B* при Г, если рассматривать его как образ при соответствии Γ^{-1}.

5.4. Сужение и продолжение соответствий

Рассмотрим понятия сужения и продолжения соответствий.

Пусть $\Gamma=(X,Y,F)$ - произвольное соответствие и *A* - произвольное подмножество множества *X*.

Сужением соответствия Г на множество *A* называется и через Γ_A обозначается соответствие, график которого F_A определяется выражением

$$F_A=(A\times Y)\cap F, \qquad (5.17)$$

т.е. $\Gamma_A=(X,Y,F_A)$. Ясно, что соответствие Γ_A включается в соответствие Г, причем соответствие Г в этом случае, иногда называется ***продолжением соответствия*** Γ_A на множество *X*.

Пусть соответствия Г и Δ имеют одинаковые области отправления и прибытия, т.е. $\Gamma=(X,Y,F)$, $\Delta=(X,Y,P)$. Тогда для произвольного $A\subseteq X$ выполняются следующие равенства:

$$(\Gamma\cup\Delta)_A = \Gamma_A \cup\Delta_A; \qquad (5.18)$$

$$(\Gamma\cap\Delta)_A = \Gamma_A\cap\Delta_A; \qquad (5.19)$$

$$(\Gamma\backslash\Delta)_A = \Gamma_A\backslash\Delta_A; \qquad (5.20)$$

$$(\Gamma\Theta\Delta)_A = \Gamma_A\Theta\Delta_A; \qquad (5.21)$$

Справедливость равенств (5.18) - (5.21) следует из определений операций над соответствиями, сужения соответствия и свойств (3.25), (3.34), (3.38). Более того, равенства (5.20) и (5.21) тривиально

справедливы, так как левая и правая части обращаются в пустое соответствие Λ.

5.5. Основные свойства соответствий

Рассмотрим теперь свойства соответствий относительно введенных ранее понятий образа и прообраза при данном соответствии.

Соответствие $\Gamma=(X,Y,F)$ называется ***функциональным***, если для любого $x\in X$ образ $\Gamma(x)$ содержит не более одного элемента $y\in Y$. Иначе говоря, в графике F функционального соответствия Γ не может быть двух пар вида $<x,y_1>$ и $<x,y_2>$, $y_1\neq y_2$, $x\in X$, $y_1,y_2\in Y$. В противном случае, то есть когда существует такой $x\in X$, образ которого содержит более одного элемента $y\in Y$, соответствие называется ***нефункциональным***. В графе функционального соответствия из любой вершины не может выходить более одной дуги. Матрица инциденций R_Γ в этом случае содержит в любой строке не более одной единицы.

Любое функциональное соответствие иногда называют однозначным, а нефункциональное соответствие - многозначным.

Соответствие $\Gamma=(X,Y,F)$ называется ***антифункциональным***, если для любого элемента $x\in X$ образ $\Gamma(x)$ содержит более одного элемента $y\in Y$.

Пример. На рис.5.9 приведены графы функционального, нефункционального, и антифункционального соответствий.

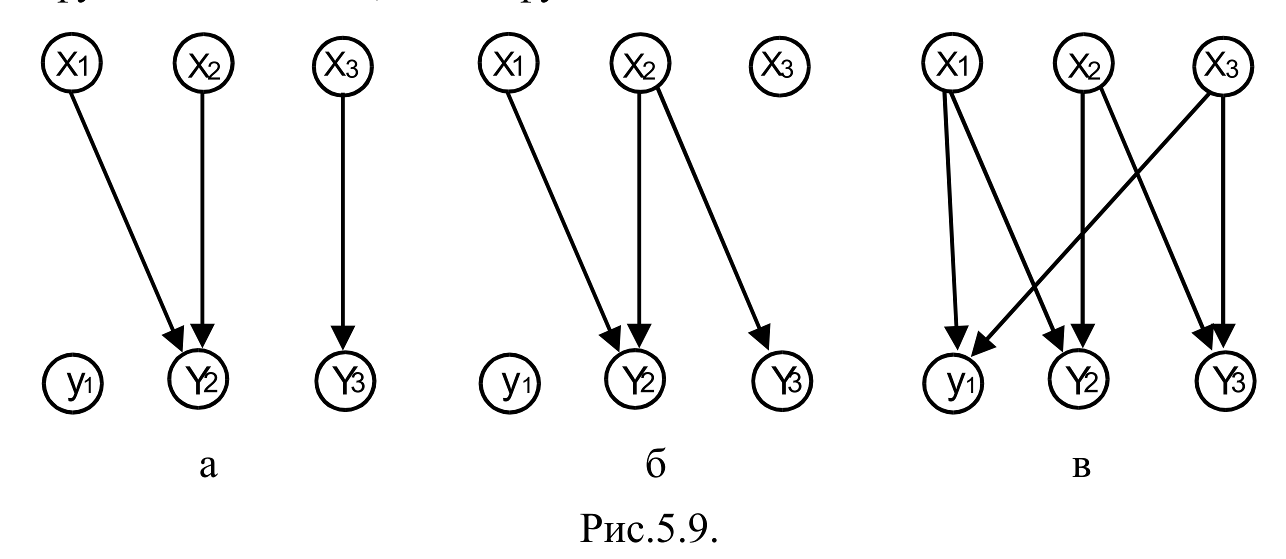


Рис.5.9.

Соответствие $\Gamma=(X,Y,F)$ называется ***инъективным***, если для любого $y\in Y$ прообраз $\Gamma^{-1}(y)$ содержит не более одного элемента $x\in X$.

Другими словами, в графике F инъективного соответствия Г не может быть двух пар вида $<x_1,y>$ и $<x_2,y>$, $x_1 \neq x_2$, $x_1,x_2 \in X$, $y \in Y$. В противном случае соответствие называется ***неинъективным***. В графе инъективного соответствия в любую вершину не может входить более одной дуги. Матрица инциденций в этом случае содержит в любом столбце не более одной единицы.

Соответствие $Г=(X,Y,F)$ называется ***антифункциональным***, если для любого $y \in Y$ прообраз $Г^{-1}(y)$ содержит более одного элемента $x \in X$.

Пример. На рис.5.10 приведены графы инъективного, неинъективного, антиинъективного соответствий.

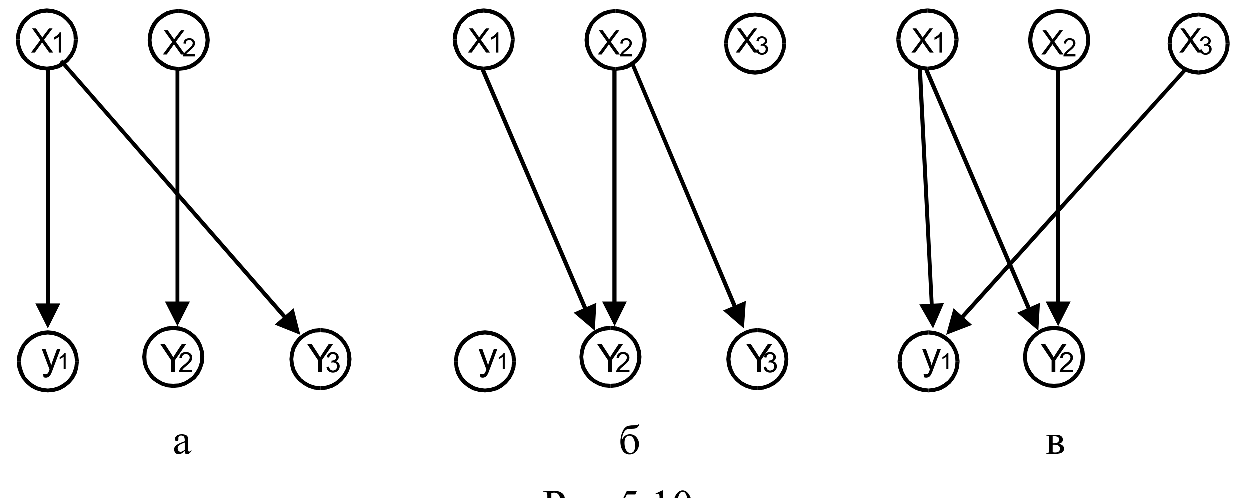


Рис.5.10.

Соответствие $Г=(X,Y,F)$ называется ***всюду определенным***, если для каждого $x \in X$ образ $Г(x) \neq \varnothing$. Иначе говоря, для всюду определенного соответствия $pr_1 F=X$. В противном случае соответствие ***не всюду определено***. В графе всюду определенного соответствия из каждой вершины $x \in X$ выходит хотя бы одна дуга. Матрица инциденций $R_г$ всюду определенного соответствия в каждой строке содержит хотя бы одну единицу.

Пример. Соответствия, показанные на рис.5.9,а,в и 5.10,а,в, всюду определены, а на рис.5.9,б и 5.10,б - не всюду определены.

Соответствие $Г=(X,Y,F)$ называется ***сюръективным***, если для любого элемента $y \in Y$ прообраз $Г^{-1}(y) \neq \varnothing$. Другими словами, для сюръективного соответствия $pr_2 F=Y$. В противном случае соответствие ***несюръективно***. В графе сюръективного соответствия в каждую вершину, соответствующую $y \in Y$, входит хотя бы одна стрелка. Матрица инциденций $R_г$ сюръективного соответствия в каждом столбце содержит хотя бы одну единицу.

Пример. Соответствия, показанные на рис.5.9,в и 5.10,а,в, сюръективны, а на рис. 5.9,а,б и 5.10,б, - несюръективны.

Произвольное соответствие Г=(X,Y,F) может обладать или не обладать любой совокупностью определенных выше свойств. Например, соответствие, показанное на рис.5.9,б, - нефункциональное, неинъективное, не всюду определенное и не сюръективное, а соответствие, приведенное на рис. 5.10,а,- нефункциональное, инъективное, всюду определенное и сюръективное.

Если соответствие Г=(X,Y,F) обладает свойствами функциональности, инъективности, всюду определенности и сюръективности, то оно называется биективным или взаимно-однозначным соответствием. Пример биективного соответствия показан на рис.5.11.

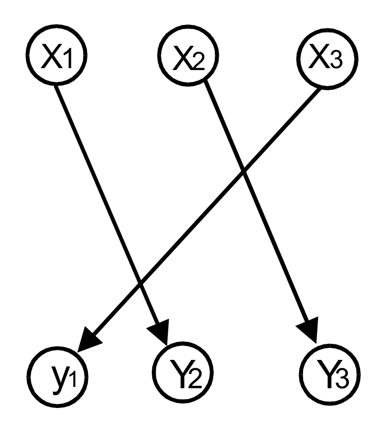


Рис.5.11.

Нетрудно установить биективное соответствие между множествами $A\times B$ и $B\times A$, если пары, отличающиеся порядком элементов, считать соответствующими. Биективное соответствие существует между множеством натуральных чисел и множеством положительных четных чисел, если каждому n сопоставить число $2n$. Отметим, что матрица инциденций $R_г$ биективного соотвтетствия содержит в каждой строке и в каждом столбце ровно одну единицу.

Рассмотрим свойства соответствий относительно операций инверсии и композиции.

Если соответствие Г=(X,Y,F) функционально, то $Г^{-1}$=(X,Y,F^{-1}) - инъективное соответствие, и наоборот. Если соответствие Г=(X,Y,F) всюду определенное, то соответствие $Г^{-1}$=(X,Y,F^{-1}) - сюръективное, и наоборот. Если Г - биективное соответствие, то $Г^{-1}$ - также биективное соответствие. Это следует из определений свойств

соответствий и операции инверсии. Кроме того, определены следующие утверждения.

Композиция функциональных соответствий функциональна. Композиция инъективных соответствий инъективна.

Докажем, например, первое утверждение. Проведем доказательство, используя закон контрапозиции (2.17).

Пусть соответствие $\Phi = (X, W, F \circ P)$ является композицией соответствий Г=(X,Y,F) и Δ=(Z,W,P). На основании (2.17) необходимо доказать, что если Ф нефункциональное соответствие, то Г нефункционально, или Δ нефункционально.

Пусть Ф - нефункциональное соответствие Тогда, по определению функциональности, существуют, по крайней мере две такие пары $<x,w_1>$ и $<x,w_2>$, $w_1 \neq w_2$, что $<x,w_1> \in F \circ P$ & $<x,w_2> \in F \circ P$. По (4.25) справедливо

$$(\exists y)(<x,y> \in F \ \& \ <y,w_1> \in P) \ \& \ (\exists z)(<x,z> \in F \ \& \ <z,w_2> \in P).$$

Из истинности последнего высказывания при $y \neq z$ получаем, что $<x,y> \in F$ & $<x,z> \in F$, т.е. Г нефункционально, а при $y=z$ следует, что $<y,w_1> \in P$ & $<y,w_2> \in P$, т.е. соответствие Δ нефункционально. Таким образом, первое утверждение доказано.

Аналогично, используя (2.17), можно доказать справедливость второго утверждения.

Для антифункциональных, антиинъективных, всюду определенных, сюръективных и биективных соответствий Г и Δ утверждения, подобные доказанному, справедливы лишь в случае, когда область отправления соответствия Г совпадает с областью прибытия соответствия Δ.

5.6. Функция

Рассмотрим частный вид соответствий - функциональные соответствия. Функциональные соответствия называются ***функциями*** и обозначаются, как правило, строчными буквами. Таким образом, f =(X,Y,F) - функция с областью отправления X, областью прибытия Y и графиком $F \subseteq X \times Y$. Иногда используются обозначения f: $X \rightarrow Y$, где знак $\rightarrow$ не следует путать с логической операцией импликации. Если пара $<x,y> \in F$, то образом элемента x при функции f является элемент y. Это обозначают $f(x)=y$. Фигурные скобки при элементе y опущены

для упрощения записи, так как образом элемента x, вследствие функциональности f, может быть только одноэлементное множество. Говорят, что функция f отображает элемент x в элемент y. При этом x называется аргументом функции f, а y - значением функции f на аргументе x. Нетрудно видеть, что $f(x)=y$ является логической формулой от переменных $x\in X$ и $y\in Y$.

Функция $f=(X,Y,F)$ называется ***тождественной***, если $Y=X$ и $F=\Delta_x$ т.е. $(\forall x\in X)(f(x)=x)$.

Функция $f=(X,Y,F)$ называется ***тождественной на множестве*** $A\subseteq X\cap Y$, если для всякого $x\in A$ имеет место $f(x)=x$, иначе говоря, $\Delta_A\subseteq F$.

Пусть $f=(X,Y,F)$ - произвольная функция. Если для любых $x_1,x_2\in X$ истинно высказывание

$$x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2),$$

то такую функцию, по аналогии с соответствием, называют ***инъекцией***.

Если истинно высказывание

$$(\forall y\in Y)\ (\exists x\in X)\ (f(x)=y),$$

то функция $f=(X,Y,F)$ называется ***сюръективной*** или ***сюръекцией***.

Всюду определенную функцию f=(X,Y,F) , т.е. такую, для которой истинно высказывание

$$(\forall x\in X)\ (\exists y\in Y)(f(x)=y),$$

называют ***отображением***.

Наконец, инъюктивное и сюръективное обображение, по аналогии с соответствием, называется ***взаимно-однозначным*** отображением или ***биекцией***. Нетрудно видеть, что биекция является не только биективной функцией, но и биективным соответствием.

Биекция t: $X\to X$ называется подстановкой на множестве X. Подстановку принято записывать двумя строками, одна под другой, заключенными в скобки. Под элементом $x\in X$ записывается элемент $t(x)$. Например, если $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, то некоторая подстановка t имеет вид

$$t = \begin{pmatrix} x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 \\ x_3 x_2 x_6 x_5 x_4 x_1 \end{pmatrix}.$$

Пример. Пусть задана некоторая функция f: $X \to Y$, показанная на рис.5.9,а. Данная функция является отображением множества $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ и множество $Y=\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, так как она всюду определена, не является инъекцией, поскольку $x_1 \neq x_3$, а $f(x_1)=f(x_3)$, не сюръекцией, так как для элемента y_4 не существует $x \in X$, такого, что $f(x)=y_4$.

Отметим далее, что понятия инверсии, композиции, образа, прообраза, сужения и продолжения функции можно ввести по аналогии с соответствием, учитывая, что функция - частный вид соответствия. Поэтому на этих определениях подробно останавливаться не будем, отметим только, что для любых функций имеет место

$$(f \circ g)(x) = g(f(x)), \qquad (5.22)$$

где f: $X \to Y$ и g: $Z \to W$, а справедливость (5.22)следует из (5.10). Из (5.22) вытекает, что композиция функций соответствует последовательному применению функций.

Для функций, кроме инверсии, вводится понятие обратной функции. Пусть $f=(X, Y,F)$ - произвольная функция. Функция $g=(Y,X,P)$ называется обратной для функции f, если

$$\mathrm{pr}_1 P = \mathrm{pr}_2 F; \qquad (5.23)$$

$$f \circ g \text{ тождественна на } \mathrm{pr}_2 F. \qquad (5.24)$$

Для любой функции f существует обратная функция g . Если f - инъекция или биекция, то в этом случае g единственна и $g=f^{-1}$. Если же f не является инъекцией, то обратная функция g не единственна, поскольку не единствен способ иссечения функции f для приведения ее к инъекции. Под иссечением имеется в виду замена каждого множества пар, имеющих одинаковый второй элемент, на одну из этих пар. Поэтому в результате иссечения функция становится инъекцией.

Пример. Если f - инъекция, показанная на рис.5.12,

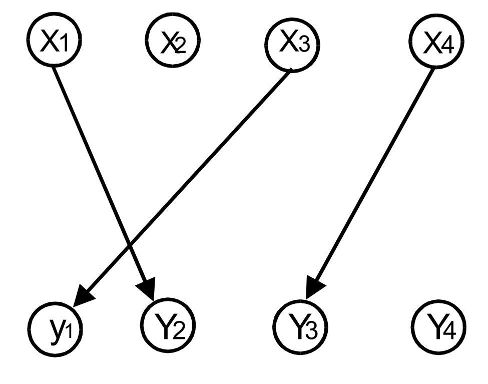


Рис.5.12.

то обратная функция *g* имеет вид, показанный на рис.5.13.

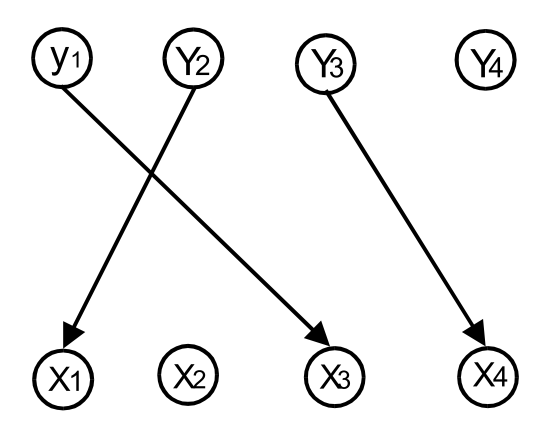


Рис.5.13.

В случае, когда *f* не является инъекцией (рис.14), необходимо предварительно построить одно из сечений, например, показанное на рис.5.15, а затем обратную функцию *g* (рис.5.16).

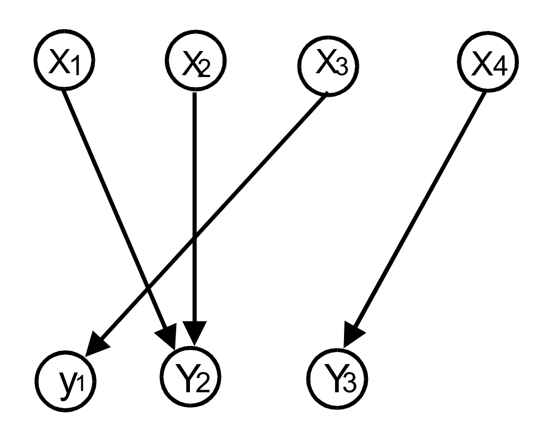


Рис.5.14.

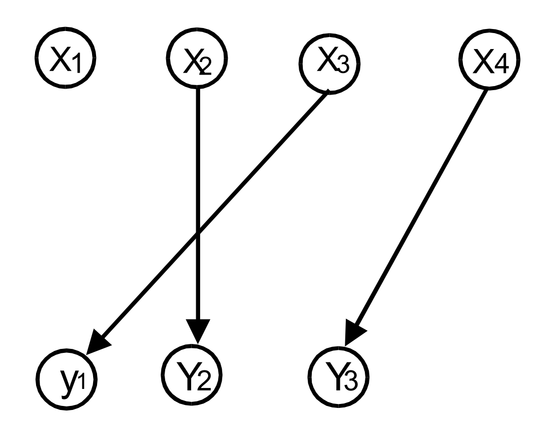


Рис.5.15.

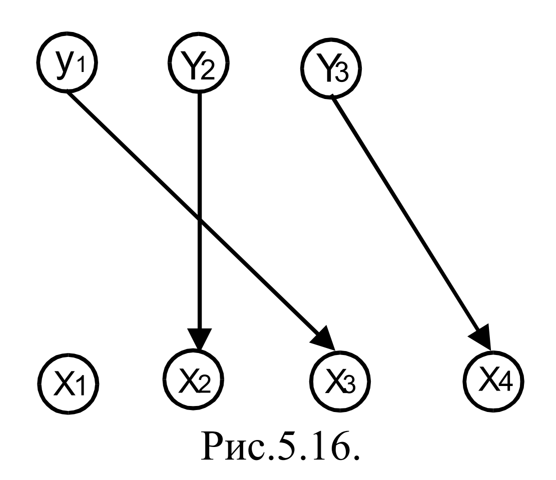


Рис.5.16.

5.7. Морфизмы на отображениях

Часто при изучении множеств, на которых заданы некоторые операции, возникает необходимость отображения свойств одного множества в другое множество. Такое отображение свойств называется в общем случае морфизмом. В зависимости от свойств отображений морфизмы приобретают конкретные названия гомоморфизма, мономорфизма, эпиморфизма и изоморфизма.

Рассмотрим морфизмы на частном виде соответствий – отображениях.

Пусть $f:X\rightarrow Y$ - произвольное отображение, причем на множестве X и на множестве Y задана некоторая операция ♦. Если для любых двух подмножеств выполняется

$$f(A_1 \blacklozenge A_2) = f(A_1) \blacklozenge f(A_2), \tag{5.25}$$

то отображение f называется гомоморфизмом X в Y.

Если f - инъективное отображение и справедливо (5.25), то f называется ***мономорфизмом***, или инъективным гомоморфизмом.

Если f - сюръективное отображение, то при справедливости (5.25), отображение f называется ***эпиморфизмом***, или сюрътивным гомоморфизмом. В этом случае Y называется эпиморфным образом множества X.

Наконец, если f - биекция и выполняется (5.25), то отображение f называется ***изоморфизмом***, или биективным гомоморфизмом.

Пусть $f:X\rightarrow Y$ - произвольное отображение. Тогда, в силу (5.9), можно записать $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$, где $A,B\subseteq X$, а $f(A\cup B)$, $f(A)$ и $f(B)$ - образы множеств $A\cup B$, A и B при отображении f. Поэтому на основании (5.25) отображение f по операции объединения множеств является гомоморфизмом.

Если f - инъективное отображение, то кроме (5.9) справедливы выражения:

$$f(A\cap B) = f(A)\cap f(B); \tag{5.26}$$
$$f(A\backslash B) = f(A)\backslash f(B); \tag{5.27}$$
$$f(A\Theta B) = f(A)\ \Theta f(B). \tag{5.28}$$

Поэтому, на основании (5.25) инъективное отображение f по операциям $\cup$, $\cap$, \ и Θ является мономорфизмом.

Легко увидеть, что биекция $f{:}X\to Y$ представляет собой по операциям $\cup$, $\cap$, \ и Θ изоморфизм.

Для гомоморфизмов справедливы следующие важные утверждения:

- Если $f{:}X\to Y$ и $f^{-1}{:}Y\to X$ - гомоморфизмы, то f и f^{-1} - изоморфизмы;
- Если $f{:}X\to Y$ и $g{:}Y\to Z$ - гомоморфизмы по операции $\blacklozenge$, то $f\circ g{:}X\to Z$ - гомоморфизм.

Докажем первое утверждение. Выше было показано, что если соответствие функционально и всюду определено, то его инверсия инъективна и сюрьективна, и наоборот. Используя это, а также то, что f и f^{-1} гомоморфизмы, получаем, что f и f^{-1} всюду определенные, инъективные и сюрьективные функции, т.е. биекции. Следовательно, f и f^{-1} - изоморфизмы.

Покажем справедливость второго утверждения. Так как область прибытия отображения f совпадает с областью отправления отображения g, то $f\circ g = h$ также является отображением, для которого выполняется

$$h(A_1 \blacklozenge A_2) = h(A_1)\ \blacklozenge\ h(A_2),$$

поскольку отображение h обладает теми же свойствами, что и отображение f и g. Следовательно, h является гомоморфизмом.

5.8. Контрольные вопросы

1. Чем отличается понятие соответствия от понятия подмножества прямого произведения множеств?

2. Как называется и обозначается соответствие Г=(X, $\varnothing$, F)?

3. Из каких элементов образуется матрица инциденций $R_г$ соответствий $Г_{\varnothing}$ и $Г_{nm}$?

4. Чему равно число различных соответствий на данных множествах X и Y?

5. Как определяется дополнение соответствия?

6. Что такое инверсия соответствия и композиция соответствий?

7. В каких случаях композиция соответствий приводит к соответствию с пустым графиком?

8. Как получить композицию соответствий, заданных матрицами инциденций, в матричном виде?

9. В каком случае образ множества при данном соответствии является пустым множеством?

10. В каком случае прообраз множества при данном соответствии совпадает с областью определения соответствия?

11. Как найти образ множества при композиции соответствий?

12. В каком случае образ и прообраз множества при данном соответствии совпадают?

13. Что называется функциональным, инъективным, всюду определенным, сюръективным соответствием?

14. Возможно ли соответствие одновременно нефункциональное, неинъективное, не всюду определенное и несюръективное? Если возможно, то приведите пример, а если невозможно, то объясните, почему?

15. Какой совокупностью свойств обладают и не обладают соответствия $\Gamma_{\varnothing}$ и Γ_{nm}?

16. Какое соответствие называется взаимно-однозначным?

17. В каких случаях инверсия соответствия является инъективным и всюду определенным соответствием?

18. Какими свойствами должно обладать соответствие, чтобы его инверсия являлась функцией, отображением?

19. Чем отличается инъективное отображение от биекции?

20. Чем отличается инъективное соответствие от инъекции?

21. Для какой функции существует и единственна обратная функция?

22. Что такое иссечение функции?

23. Какие морфизмы рассматриваются на отображениях?

24. В каком случае отображение является одновременно гомоморфизмом, мономорфизмом и эпиморфизмом?

25. Всегда ли композиция гомоморфизмов является гомоморфизмом?

5.9. Упражнения и задачи

1. Построить граф некоторого соответствия $\Gamma=(X,Y,F)$ с $|X|=5$, $|Y|=4$, $|F|=7$. Задать его в теоретико-множественном и матричном виде.

2. Пусть даны соответствия $\Gamma_1=(X_1,Y_1,F_1)$, где $X_1=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $Y_1=\{y_1, y_2, y_3\}$, $F_1=\{<x_1,y_1>, <x_2,y_1>, <x_3,y_1>, <x_4,y_2>, <x_5,y_3>\}$ и $\Gamma_2=(X_2,Y_2,F_2)$ где $X_2=\{x_2, x_4, x_6, x_7\}$, $Y_2=\{y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}$, $F_2=\{<x_2,y_3>, <x_4,y_2>, <x_6,y_4>, <x_6,y_6>\}$.

Найти

1) $\Gamma_1\cup\Gamma_2$, $\Gamma_1^{-1}\cup\Gamma_2^{-1}$;

2) $\Gamma_1\cap\Gamma_2$, $\Gamma_1^{-1}\cap\Gamma_2^{-1}$;

3) $\Gamma_1\setminus\Gamma_2$, $\Gamma_1^{-1}\setminus\Gamma_2^{-1}$; $\Gamma_2\setminus\Gamma_1$, $\Gamma_2^{-1}\setminus\Gamma_1^{-1}$;

4) $\Gamma_1\Theta\Gamma_2$, $\Gamma_1^{-1}\Theta\Gamma_2^{-1}$;

5) $\overline{\Gamma}_1$, $\overline{\Gamma}_2$;

6) $\Gamma_1\cup\overline{\Gamma}_1$, $\Gamma_1\cap\overline{\Gamma}_1$, $\Gamma_1\setminus\overline{\Gamma}_1$, $\Gamma_1\,\Theta\,\overline{\Gamma}_1$,

7) $\overline{\Gamma_1\cup\Gamma_2}$, $\overline{\Gamma_1\cap\Gamma_2}$, $\overline{\Gamma_1\setminus\Gamma_2}$, $\overline{\Gamma_1\Theta\Gamma_2}$.

3. Пусть даны соответствия $\Gamma=(X,Y_1,F)$ и $\Delta=(Y_2,Z,P)$, где $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4,\}$, $Y_1=\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$, $F=\{<x_1,y_5>, <x_2,y_5>, <x_3,y_3>, <x_4,y_1>, <x_4,y_2>\}$, а $Y_2=\{y_3, y_4, y_5, y_6, y_7\}$; $Z=\{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$, $P=\{<y_4,z_4>, <y_5,z_2>, <y_5,z_5>, <y_3,z_1>, <y_3,z_3>, <y_6,z_1>, <y_7,z_2>, <y_7,z_4>\}$, и множества $A=\{x_2,x_3,x_4\}$, $B=\{y_1,y_3,y_5\}$, $C=\{z_2,z_3,z_4\}$. Найти

1) $\Gamma\circ\Delta$,

2) $\Delta^{-1}\circ\Gamma^{-1}$,

3) $\Gamma(A)$, $\Gamma^{-1}(B)$,

4) $(\Gamma\circ\Delta)(A)$,

5) $(\Gamma\circ\Delta)^{-1}(C)$,

6) R_Γ и R_Δ и построить $R_\Gamma \circ R_\Delta$.

4. Пусть $\Gamma = (X,Y,F)$ - произвольное соответствие и $A\subseteq X$, $B\subseteq X$, $C\subseteq Y$, $D\subseteq Y$. Доказать, что

1) $\Gamma(A\cap B)\subseteq\Gamma(A)\cap\Gamma(B)$;

2) $\Gamma(A)\setminus\Gamma(B)\subseteq\Gamma(A\setminus B)$;

3) $\Gamma(A)\Theta\Gamma(B)\subseteq\Gamma(A\Theta B)$;

4) $\Gamma^{-1}(C\cap D)\subseteq\Gamma^{-1}(C)\cap\Gamma^{-1}(D)$;

5) $\Gamma^{-1}(C)\setminus\Gamma^{-1}(D)\subseteq\Gamma^{-1}(C\setminus D)$;

6) $\Gamma^{-1}(C)\,\Theta\,\Gamma^{-1}(D)\subseteq\Gamma^{-1}(C\Theta D)$;

7) $\Gamma_A\cup\Gamma_B=\Gamma_{A\cup B}$;

8) $\Gamma_A \cap \Gamma_B = \Gamma_{A\cap B}$;

9) $\Gamma_A \setminus \Gamma_B = \Gamma_{A \setminus B}$.

10) $\Gamma_A \Theta \Gamma_B = \Gamma_{A\Theta B}$.

5. Доказать, что для произвольной инъекции f: $X \rightarrow Y$ и множеств $A \subseteq X$ и $B \subseteq X$ имеет место

1) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$;

2) $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$;

3) $f(A \Theta B) = f(A) \Theta f(B)$.

6. Доказать, что для произвольной функции f: $X \rightarrow Y$ и множеств $C \subseteq Y$ и $D \subseteq Y$ имеет место

1) $f^{-1}(C \cap D) \subseteq f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$,

2) $f^{-1}(C \setminus D) \subseteq f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$,

3) $f^{-1}(C \Theta D) \subseteq f^{-1}(C) \Theta f^{-1}(D)$.

7. Найти достаточное условие, которому должна удовлетворять функция f, чтобы любая ее обратная функция g была

1) отображением;

2) сюрьекцией;

3) биекцией.

6. ОТНОШЕНИЯ

6.1. Определения и способы задания отношений

Бинарным отношением на произвольном множестве $X \in \Re(\boldsymbol{E})$ называется и через $\varphi = (X,F)$ обозначается пара множеств, в которой $F \subseteq X^2$. Поскольку далее рассматриваются только бинарные отношения, то определение "бинарное" будем опускать и говорить просто об отношениях. В отношении $\varphi = (X,F)$ множество X называется областью задания, а F – графиком отношения. Нетрудно видеть, что отношение φ является соответствием $\Gamma=(X,Y,F)$, у которого $X=Y$, т.е. отношение представляет собой частный случай соответствия. По аналогии с соответствиями множество $\rho r_1 F \subseteq X$ называется областью определения, а $\rho r_2 F \subseteq X$ – областью значений отношения φ. В общем случае $pr_1 F \neq pr_2 F$. Если $X=\varnothing$, то отношение называется пустым и обозначается Λ.

Два отношения $\varphi = (X,F)$ и $\psi = (Y,P)$ называются ***равными***, если $X=Y$ и $F=P$.

Также как и для соответствий, существует три эквивалентных способа заданий отношений: теоретико-множественный, матричный и графический.

Теоретико-множественное задание отношения следует из определения. Чтобы записать отношение, необходимо задать множество $X=\{x\}$, $i \in I=\{1,2,..,n\}$ и график $F=\{<x_i,x_j>\}$, где $x_i, x_j \in X$.

В матричном виде отношение φ задается с помощью матрицы смежности R_φ, представляющей собой квадратную таблицу размером $n \times n$, строки и столбцы которой помечены элементами $x_i \in X$, а на пересечении x_i строки и x_j столбца ставится элемент $r_{ij}=1$, если $<x_i,x_j> \in F$ и $r_{ij}=0$, если $<x_i, x_j> \notin F$.

Отношение φ можно задавать в виде графа, у которого все элементы $x_i \notin X$ изображаются произвольно расположенными на плоскости вершинами, а каждая пара $<x_i,x_j> \in F$ – дугой, идущей от вершины x_i к вершине x_j. Условимся, что дуга $<x_i, x_i>$ называется петлей при вершине x_i. Стрелку на петле будем опускать.

Пример. Зададим некоторое отношение $\varphi = (X,F)$, у которого $X=\{x_1,x_2, x_3, x_4, x_5\}$, а $F=\{<x_1,x_5>, <x_1,x_3>, <x_2,x_1>, <x_2,x_2>, <x_2,x_3>, <x_2,x_4>, <x_3,x_1>, <x_5,x_2>\}$. В данном отношении область определения $pr_1F=\{x_1, x_2, x_3, x_5\}$, а область значений $pr_2F=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$.

Матрица смежности R_φ имеет вид:

$$R_\varphi = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| \end{array}$$

Граф отношения φ показан на рисунке 6.1.

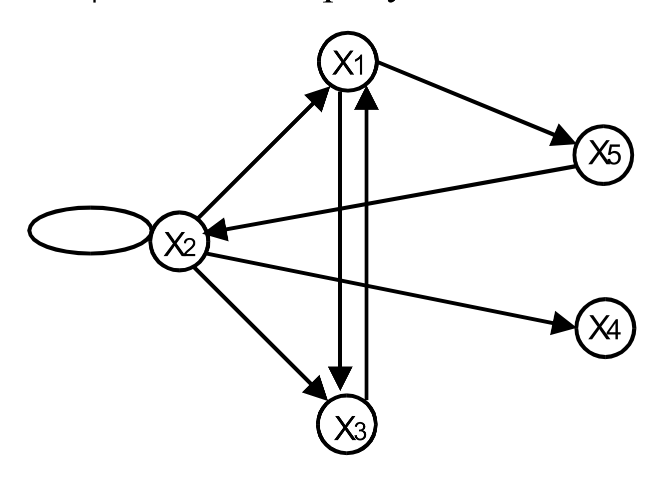


Рис.6.1.

Пусть $\varphi = (X, F)$ – произвольное отношение и пара $<x_i,x_j>\in F$, $x_i,x_j\in X$. В этом случае говорят, что элементы x_i и x_j находятся в отношении φ и обозначают $x_i\, \varphi\, x_j$.

Если некоторые $a,b\in X$, то $a\varphi b$ является или истинным или ложным высказыванием, в зависимости от того истинно или ложно высказывание $<a,b> \in F$. В случае, когда пара $<c, d>\notin F$, говорят, что элементы c и d не находятся в отношении φ и пишут $\rceil(c\, \varphi\, d)$.

Если x_i, x_j принимают значения из X, то $x_i\varphi x_j$ является логической формулой от переменных x_i и x_j. Отсюда следует, что задать некоторое отношение φ на множестве X можно, задав такую логическую формулу от двух переменных, которая определена на множестве X.

На данном множестве X можно рассматривать семейство различных отношений, начиная с отношения с пустым графиком $F=\varnothing$, с которым сопоставляется матрица смежности R_φ, состоящая только из нулевых элементов, и кончая отношением с полным графиком $F=X^2$, которому соответствует матрица смежности R_φ со всеми единичными элементами. Отсюда можно сделать вывод, что

число различных отношений на множестве X совпадает с числом различных матриц из нулей и единиц порядка n и не превышает 2^{n2}.

Отношение $\varphi = (X,F)$, у которого $F=\varnothing$, будем называть отношением с пустым графиком и обозначать $\varphi_\varnothing$. Нетрудно видеть, что высказывание $(\forall x_i,x_j \in X)(x_i \varphi_\varnothing x_j)$ всегда ложно.

Отношение $\varphi = (X,F)$, у которого $F=X^2$, будем называть полным отношением и обозначать φ_n. Высказывание $(\forall x_i, x_j \in X)(x_i \varphi_n x_j)$ всегда истинно.

Отношение $\varphi = (X,F)$ называется тождественным и обозначается φ_Δ, если его график F совпадает с диагональю множества X, т.е. $F=\Delta_x$. Для отношения φ_Δ истинно

$$(\forall x_i, x_j \in X)(x_i \varphi_\Delta x_j \leftrightarrow x_i = x_j). \qquad (6.1.)$$

Отношение $\varphi = (X,F)$ называется антитождественным, если $F=X^2 \setminus \Delta_x$. Для антитождественного отношения истинно высказывание

$$(\forall x_i, x_j \in X)(x_i \, \varphi \, x_j \leftrightarrow x_i \neq x_j).$$

Пример. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. Тогда $\varphi_1 =(X,F_1)$ является отношением с пустым графиком, если $F_1=\varnothing$. Отношение $\varphi_2=(X_1F_2)$, у которого $F_2=X^2 = \{<x_1,x_2>, <x_1,x_2>, <x_1,x_3>, <x_2,x_1>, <x_2,x_2>, <x_2,x_3>, <x_3,x_1>, <x_3,x_2>, <x_3,x_3>\}$ является полным отношением. Тождественное отношение $\varphi_3 = (X,F_3)$ получим, если в качестве F_3 выбираем подмножество $\Delta_x \subseteq X^2$, т.е. $F_3=\{<x_1,x_1>, <x_2,x_2>, <x_3,x_3>\}$. Отношение $\varphi_4=(X,F_4)$ является антитождественным, если $F_4=X^2 \setminus \Delta_x=\{<x_1,x_2>, <x_1,x_3>, <x_2,x_1>, <x_2,x_3>, <x_3,x_1>, <x_3,x_2>\}$. Графы отношений φ_1, φ_2, φ_3 и φ_4 показаны на рисунке 6.2.

6.2. Операции над отношениями

Пусть $\varphi = (X,F)$ и $\psi=(Y,P)$ – произвольные отношения. Говорят, что отношение φ включается в отношение ψ, если $X \subseteq Y$, а $F \subseteq P$. Включение отношения φ в ψ обозначается $\varphi \subseteq \psi$. Нетрудно видеть, что

$$(\forall x_i, x_j \in X)(\varphi \subseteq \psi \leftrightarrow x_i \varphi \, x_j \to x_i \, \psi \, x_j). \qquad (6.2.)$$

Определим теперь операции объединения, пересечения, разности, симметрической разности, дополнения, инверсии и композиции над отношениями аналогично тому, как это было сделано для соответствий.

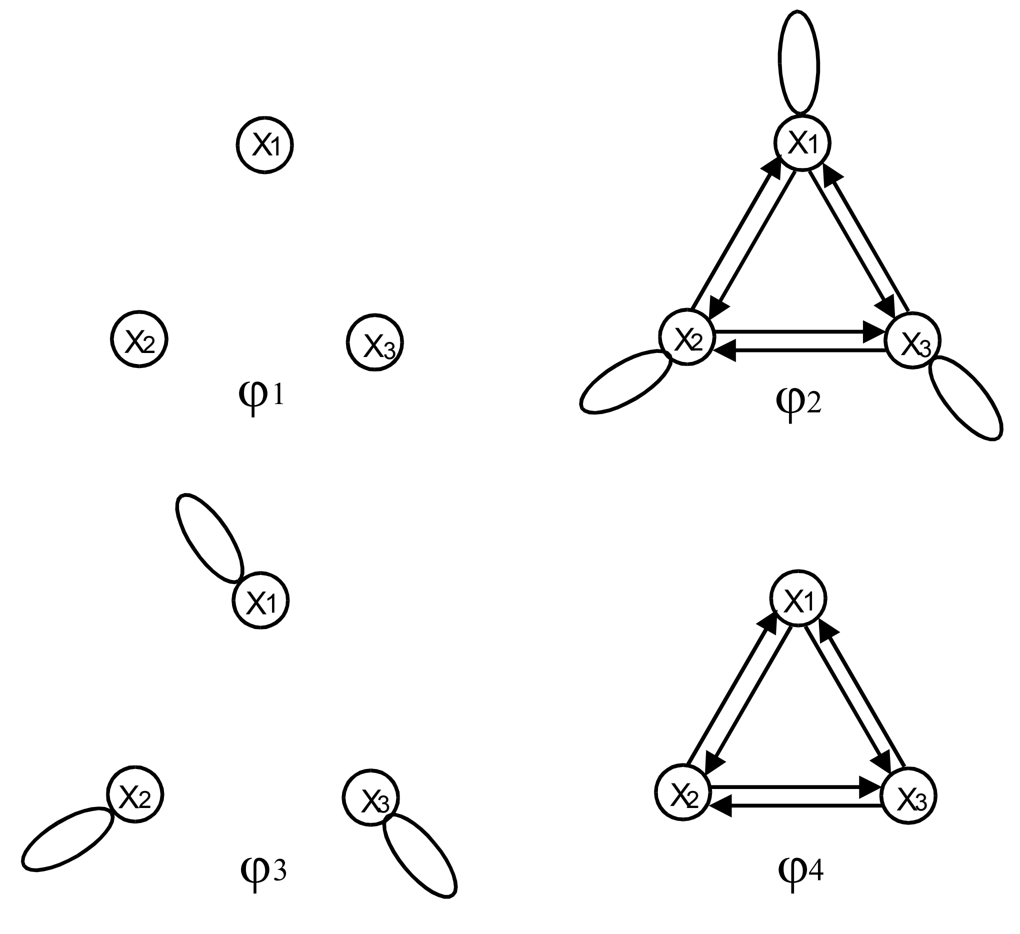


Рис.6.2.

Пусть даны произвольные отношения $\varphi = (X,F)$ и $\psi = (Y,P)$, $X,Y \in \Re(\boldsymbol{E})$.

Объединением отношений φ и ψ называется отношение $\eta = (Z, S)$, обозначаемое $\eta = \varphi \cup \psi$, если $Z = X \cup Y$, а $S = F \cup P$.

В этом случае истинно высказывание

$$(\forall z_i, z_j \in Z)[z_i \eta z_j \leftrightarrow z_i \varphi z_j \vee z_i \psi z_j]. \quad (6.3.)$$

Пересечением отношений φ и ψ называется отношение $\pi = (Z, S)$ обозначаемое $\pi = \varphi \cap \psi$, если $Z = X \cap Y$, а $S = F \cap P$.

В логической форме пересечение отношений определяется как

$$(\forall z_i, z_j \in Z)[z_i \pi z_j \leftrightarrow z_i \varphi z_j \ \& \ z_i \psi z_j]. \quad (6.4.)$$

Разностью отношений φ и ψ называется отношение $\sigma = (Z,S)$, обозначаемое $\sigma = \varphi \backslash \psi$, у которого $Z = X \backslash Y$, а $S = F \backslash P$. Заметим, что из графика S необходимо исключить пары, не являющиеся элементами множества Z^2 . Для разности отношений истинно высказывание

$$(\forall z_i, z_j \in Z)[z_i \sigma z_j \leftrightarrow z_i \varphi z_j \ \& \ \rceil(z_i \psi z_j)]. \quad (6.5.)$$

Симметрической разностью отношений φ и ψ называется отношение $\delta = (Z,S)$, обозначаемое $\delta = \varphi \Theta \psi$, у которого Z=XΘY, а S=FΘ P, причем из графика S необходимо удалить пары, не принадлежащие Z^2. Очевидно, что

$$(\forall z_i, z_j \in Z)[z_i \,\delta\, z_j \leftrightarrow (z_i \varphi z_j \,\&\, \rceil(z_i \;\psi z_j)) \vee (\rceil(z_i \,\varphi\, z_j) \,\&\, z_i \,\psi\, z_j)]. \quad (6.6.)$$

Если отношение φ включается в отношение ψ, то есть $\varphi \subseteq \psi$, то дополнением отношения φ до отношения ψ называется отношение $\overline{\varphi} = (Z,S)$, когда $Z=Y$, а $S=P\backslash F$. Очевидно, что

$$(\forall z_i, z_j \in Z)[z_i \;\overline{\varphi}\; z_j \leftrightarrow z_i \,\psi\, z_j \,\&\, \rceil(z_i \,\varphi\, z_j)]. \quad (6.7.)$$

В случае, когда для произвольного отношения φ не указано, до какого отношения берется дополнение, то имеется в виду, что оно берется до полного отношения φ_n.

Инверсией отношения $\varphi = (X,F)$ называется отношение $\varphi^{-1} = (X, F^{-1})$, у которого график F^{-1} представляет собой инверсию графика F. Для инверсии отношения φ истинно высказывание

$$(\forall x_i, x_j \in X)[x_i \,\varphi\, x_j \leftrightarrow x_j \varphi\, x_i]. \quad (6.8.)$$

Композицией отношений $\varphi = (X,F)$ и $\psi = (Y,P)$ называется отношение $\chi=(Z,S)$, обозначаемое $\chi = \varphi \circ \psi$, у которого $Z=X \cup Y$, а график $S=F \circ P$. Если $X \cap Y=\varnothing$, то в результате композиции отношений получаем отношение с пустым графиком. Очевидно, что

$$(\forall z_i,z_j \in Z)[z_i \,\chi\, z_j \leftrightarrow (\exists z_k \in Z)(z_i \varphi z_k \,\&\, z_k \psi z_j)]. \quad (6.9.)$$

Примеры. Пусть заданы отношение $\varphi=(X,F)$, где $X=\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$, $F=\{<z_1, z_2>, <z_2, z_2>, <z_2, z_4>, <z_3,z_1>, <z_3, z_4>, <z_4, z_3>\}$, и отношение $\psi = (Y,P)$, где $Y=\{z_1, z_2, z_5\}$, а $P=\{<z_1, z_2>, <z_2, z_1>, <z_2, z_2>, <z_1,z_5>, <z_5,z_5>\}$, графы которых показаны на рис 6.3.

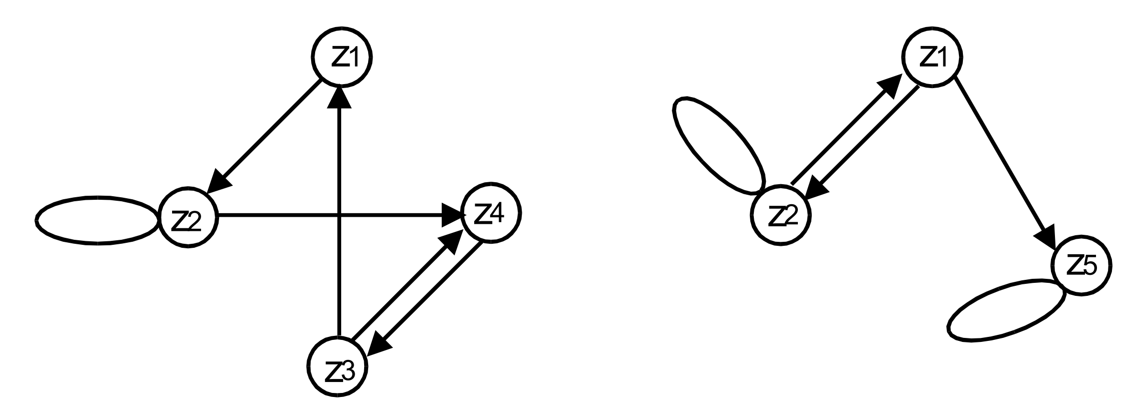


Рис.6.3. Графы отношений φ и ψ

На основании определений соответствующих операций над отношениями получаем объединение отношений $\varphi \cup \psi = \eta = (Z_1, S_1)$, где $Z_1 = \{ z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 \}$, $S_1 = \{<z_1, z_2>, <z_2,z_2>, <z_2,z_4>, <z_3,z_1>, <z_3,z_4>, <z_4,z_3>, <z_2,z_1>, <z_1, z_5>, <z_5, z_5>\}$. Граф полученного отношения показан на рис.6.4.

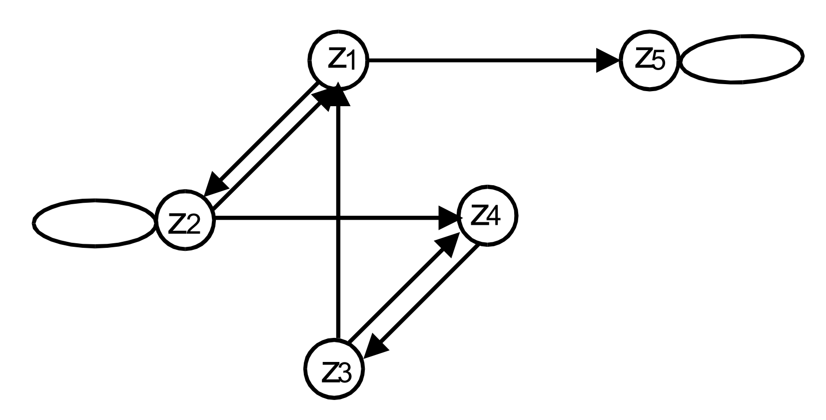


Рис.6.4. Граф объединения отношений φ и ψ

Пересечение отношений $\varphi \cap \psi = \pi = (Z_2, S_2)$, где $Z_2 = \{z_1, z_2\}$, $S_2 = \{<z_1, z_2>, <z_2, z_2>\}$. Граф отношения π показан на рис 6.5.

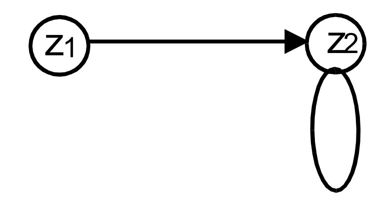


Рис.6.5. Граф пересечения отношений φ и ψ

Разность отношений $\varphi \backslash \psi = \sigma = (Z_3, S_3)$, где $Z_3 = \{z_3, z_4\}$, $S_3 = \{<z_3, z_4>, <z_4, z_3>\}$. Граф отношения σ показан на рис.6.6.

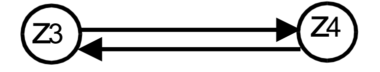
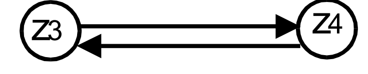


Рис.6.6. Граф разности отношений φ и ψ

Симметрическая разность отношений $\varphi \,\Theta\, \psi = \delta = (Z_4, S_4)$, где $Z_4 = \{z_3, z_4, z_5\}$, $S_4 = \{<z_3, z_4>, <z_4, z_3>, <z_5, z_5>\}$. Граф отношения δ показан на рис.6.7.



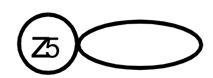


Рис.6.7. Граф симметрической разности отношений φ и ψ

Дополнение $\overline{\varphi}$ отношения φ до полного отношения φ_n имеет вид $\overline{\varphi} = (X, S_5)$, где S_5={<z_1,z_1>, <z_1,z_3>, <z_1,z_4>, <z_2,z_1>, <z_2,z_3>, <z_3,z_2>, <z_3,z_3>, <z_4,z_1>, <z_4,z_2>, <z_4,z_4>}. Граф дополнения отношения $\overline{\varphi}$ показан на рис.6.8.

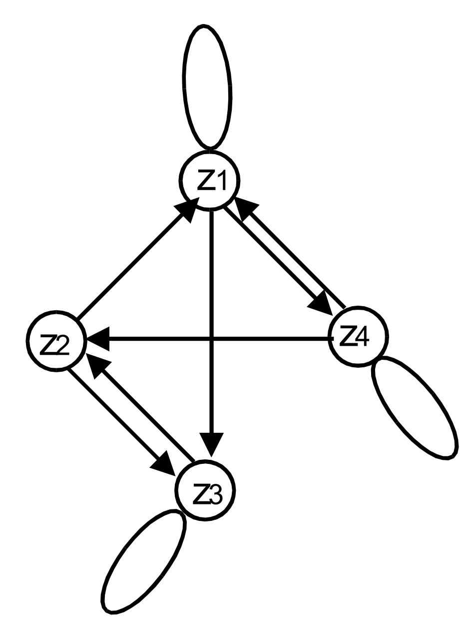


Рис.6.8. Граф дополнения отношения φ

Инверсия ψ^{-1} отношения ψ имеет вид $\psi^{-1}=(Y, S_6)$, где S_6={<z_1, z_2>, <z_2,z_1>, <z_2,z_2>, <z_5,z_1>, <z_5,z_5>}. Граф отношения ψ^{-1} показан на рис.6.9.

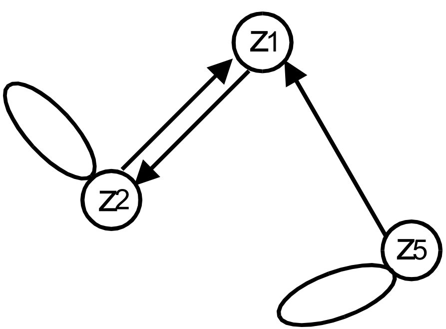


Рис.6.9. Граф инверсии отношения ψ

Композиция отношений $\chi = \varphi \circ \psi = (Z_7, S_7)$, где Z_7 = {z_1, z_2, z_3, z_4, z_5}, S_7={<z_1,z_2>, <z_1,z_4>, <z_2,z_2>, <z_2,z_4>}. Граф отношения χ показан на рис.6.10.

Свойства операций объединения, пересечения, разности и симметрической разности над отношениями подобны свойствам над множествами, элементами которых являются упорядоченные пары. Поэтому подробно на них останавливаться не будем, а рассмотрим только свойства этих операций относительно инверсии и композиции отношений.

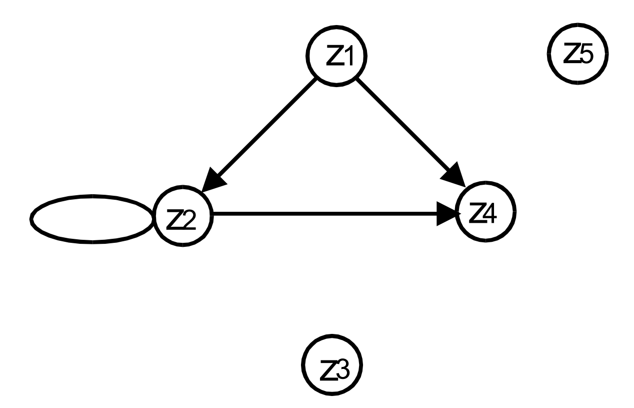


Рис.6.10. Граф композиции отношений φ и ψ

Пусть $\varphi = (X,F)$, $\psi = (X,P)$ и $\chi = (X,S)$ – произвольные отношения, заданные на множестве X. Имеют место следующие свойства:

$$(\varphi \cup \psi)^{-1} = \varphi^{-1} \cup \psi^{-1}; \qquad (6.10)$$

$$(\varphi \cap \psi)^{-1} = \varphi^{-1} \cap \psi^{-1}; \qquad (6.11)$$

$$(\varphi \circ \psi)^{-1} = \psi^{-1} \circ \varphi^{-1}; \qquad (6.12)$$

$$\varphi \circ (\psi \cup \chi) = (\varphi \circ \psi) \cup (\varphi \circ \chi); \qquad (6.13)$$

$$\varphi \circ (\psi \cap \chi) \subseteq (\varphi \circ \psi) \cap (\varphi \circ \chi). \qquad (6.14)$$

Выражения, аналогичные (6.11) и (6.14), для операций разности и симметрической разности не приводятся, т.к. они истинны тривиальным образом в силу определения этих операций над отношениями. Левые и правые части выражений, содержащих разности или симметрические разности отношений, заданных на одном множестве, равны в этом случае пустому отношению.

Докажем справедливость выражений (6.11) и (6.12).

Поскольку отношения φ, ψ и χ заданы на одном и том же множестве X, то доказательство можно провести только для графиков этих отношений подобно тому, как это сделано в разделе 4.4. Воспользуемся методами доказательства, в которых отношения представлены в виде высказываний.

Выражение (6.11) в виде высказывания запишется следующим образом. Для любых $x, y \in X$ истинно

$$x(\varphi \cap \psi)^{-1}y \leftrightarrow x(\varphi^{-1} \cap \psi^{-1})y. \qquad (6.15)$$

Покажем это:

$$x(\varphi \cap \psi)^{-1}y \leftrightarrow y(\varphi \cap \psi)x \leftrightarrow y\varphi x \,\&\, y\psi x \leftrightarrow x\varphi^{-1}y \,\&\, x\psi^{-1}y \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow x(\varphi^{-1} \cap \psi^{-1})y.$$

Высказывание (6.15), а следовательно, и равенство (6.11) доказаны.

Докажем теперь свойство (6.12). Для этого покажем, что для любых $x, y \in X$ истинно

$$x(\varphi \circ \psi)^{-1} y \leftrightarrow x(\psi^{-1} \circ \varphi^{-1}) y . \qquad (6.16)$$

Покажем это:

$$x(\varphi \circ \psi)^{-1} y \leftrightarrow y(\varphi \circ \psi) x \leftrightarrow (\exists z \in X)(y \varphi z \ \& \ z \psi x) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists z \in X)(z \varphi^{-1} y \ \& \ x \psi^{-1} z) \leftrightarrow x(\psi^{-1} \circ \varphi^{-1}) y.$$

Выражение (6.16), а следовательно, и равенство (6.12) доказаны.

6.3. Образ и прообраз множества при данном отношении

Для отношений, так же как и для соответствий, рассматриваются понятия образа и прообраза.

Пусть дано произвольное отношение $\varphi = (X, F)$. ***Образом элемента*** $a \in X$ при отношении φ называется и через $\varphi(a)$ обозначается множество тех элементов $x_j \in X$, для которых истинно высказывание $a \varphi x_j$. Иначе говоря,

$$\varphi(a) = \{x_j \in X \mid a \varphi x_j\}. \qquad (6.17)$$

Образ $\varphi(a)$ иногда называют сечением отношения φ по элементу a или многозначным отображением элемента a в множество X. Нетрудно видеть, что семейство образов $\varphi(x_i)$ для всех $x_i \in X$ представляет собой еще один способ задания отношения φ. Получаемое в этом случае представление отношения φ называется многозначным отображением множества X в себя и обозначается, как правило, прописной греческой буквой. Это семейство для отношения φ обозначим Φ. Естественно, что ***образ множества*** $A \subseteq X$ при отношении φ представляет собой объединение образов всех элементов $x \in A$ и обозначается $\varphi(A)$.

Аналогично предыдущему, ***прообразом элемента*** $b \in X$ при отношении φ называется и через $\varphi^{-1}(b)$ обозначается множество тех элементов $x_i \in X$, для которых истинно высказывание $x_i \varphi b$. Иначе говоря:

$$\varphi^{-1}(b) = \{x_i \in X \mid x_i \varphi b\}. \qquad (6.18)$$

Задать отношение φ можно также, определив семейство прообразов $\varphi^{-1}(x_j)$ для всех элементов $x_j \in X$. Это семейство называют обратным многозначным отображением множества X в себя. Для

отношения φ обратное многозначное отображение обозначается Φ^{-1}. ***Прообразом множества*** $B \subseteq X$ при отношении φ является объединение прообразов всех элементов $x \in B$ и обозначается $\varphi^{-1}(B)$.

Пример. Для отношения $\varphi = (X,F)$ (см. рис.6.1) семейство образов всех элементов представляет собой $\Phi = \{\varphi(x_1), \varphi(x_2), \varphi(x_3), \varphi(x_4), \varphi(x_5)\}$, где $\varphi(x_1) = \{x_3, x_5\}$, $\varphi(x_2) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $\varphi(x_3) = \{x_1\}$, $\varphi(x_4) = \varnothing$, $\varphi(x_5) = \{x_2\}$.

Если $A = \{x_2, x_3\}$, то образ $\varphi(A) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$,

Семейством прообразов всех элементов является $\Phi^{-1} = \{\varphi^{-1}(x_1), \varphi^{-1}(x_2), \varphi^{-1}(x_3), \varphi^{-1}(x_4), \varphi^{-1}(x_5)\}$, где $\varphi^{-1}(x_1)=\{x_2, x_3\}$, $\varphi^{-1}(x_2)=\{x_2,x_5\}$, $\varphi^{-1}(x_3)=\{x_1,x_2\}$, $\varphi^{-1}(x_4)=\{x_2\}$, $\varphi^{-1}(x_5) = \{x_1\}$. При $B = A =\{x_2, x_3\}$ прообраз $\varphi^{-1}(B) = \{x_1, x_2, x_5\}$.

Заметим, что свойства образов и прообразов при отношении подобны аналогичным свойствам соответствий.

Определим понятия сужения и продолжения отношений. Пусть $\varphi = (X,F)$ – произвольное отношение и $A \subseteq X$. Отношение $\varphi_A = (X,F_A)$ называется сужением отношения φ на множество A, если $F_A = F \cap A^2$. Для сужения отношения φ_A истинно высказывание

$$(\forall x_i, x_j \in X)[x_i \varphi_A x_j \leftrightarrow x_i \varphi x_j \,\&\, x_i \in A \,\&\, x_j \in A] \tag{6.19}$$

Нетрудно видеть, что отношение φ_A включается в отношение φ, т.е. $\varphi_A \subseteq \varphi$. В этом случае отношение φ можно назвать продолжением отношения φ_A на множество X.

Пусть отношения $\varphi = (X, F)$ и $\psi = (X, P)$ определены на множестве X. Тогда для произвольного $A \subseteq X$ имеют место следующие равенства:

$$(\varphi \cup \psi)_A = \varphi_A \cup \psi_A; \tag{6.20}$$

$$(\varphi \cap \psi)_A = \varphi_A \cap \psi_A; \tag{6.21}$$

$$(\varphi^{-1})_A = (\varphi_A)^{-1} \tag{6.22}$$

Докажем (6.22). Для этого покажем, что для любых x, $y \in X$ истинно

$$x(\varphi^{-1})_A y \leftrightarrow x(\varphi_A)^{-1} y.$$

Покажем это:

$x(\varphi^{-1})_A y \leftrightarrow x\varphi^{-1} y \,\&\, x \in A \,\&\, y \in A \leftrightarrow y\varphi x \,\&\, x \in A \,\&\, y \in A \leftrightarrow$
$\leftrightarrow y\varphi_A x \leftrightarrow x(\varphi_A)^{-1} y$.

Тем самым (6.22) доказано.

По аналогии с соответствиями отношения могут обладать или не

обладать свойствами функциональности, инъективности, всюду определенности, сюрьективности и биективности, которые определяются через понятия образа и прообраза при данном отношении. Не давая строгих определений, проиллюстрируем эти понятия примером. На рис.6.11. показан граф некоторого отношения $\varphi = (X,F)$.

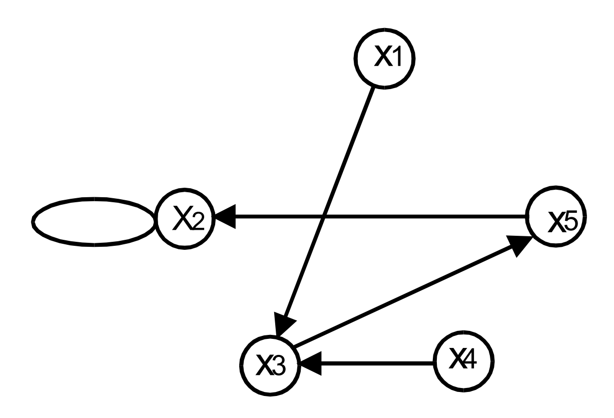


Рис.6.11. Граф отношения φ

Это отношение функционально, т.к. из каждой вершины выходит не более одной дуги, неинъективно, поскольку имеются вершины (x_2, x_3), в которые заходит более чем одна дуга, всюду определено, вследствие того, что из каждой вершины выходит по крайней мере одна дуга; несюрьективно, т.к. имеются вершины (x_1, x_4), в которые не заходит ни одна дуга, не биективно, поскольку оно не инъективно и не сюрьективно, хотя функционально и всюду определено.

6.4. Морфизмы отношений

При изучении отношений рассматриваются два вида морфизмов – морфизмы на отношениях, подобные морфизмам на отображениях, и морфизмы между отношениями, которые, в отличие от систем с операциями, сохраняют свойство элементов находиться в некотором отношении.

Пусть $\varphi = (X,F)$ – функциональное и всюду определенное отношение и пусть на множестве X задана некоторая операция □. Если для любых двух подмножеств $A_1, A_2 \subseteq X$ справедливо

$$\varphi(A_1 \square A_2) = \varphi(A_1) \square \varphi(A_2), \qquad (6.23)$$

то отношение φ называется гомоморфизмом множества X в себя.

Если, кроме того, отношение $\varphi = (X,F)$ инъективно или сюръективно или, наконец, одновременно инъективно и

сюръективно, т.е. биективно, то, при выполнении условия (6.23), отношение φ называется изоморфизмом, или биективным гомоморфизмом.

Нетрудно видеть, что рассмотренные морфизмы на отношениях являются частным случаем морфизмов на отображениях, когда области отправления в прибытия отображения равны.

Определим теперь морфизмы между отношениями. Пусть даны отношения $\varphi = (X,F)$ и $\psi = (Y,P)$ и существует отображение $f: X \to Y$. Если для любых двух элементов $x_1, x_2 \in X$, таких, что $x_1 \varphi x_2$ выполняется

$$x_1 \varphi x_2 \to f(x_1) \psi f(x_2), \tag{6.24}$$

где $f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$, $y_1, y_2 \in Y$, то отображение f называется гомоморфизмом между отношениями φ и ψ.

Если f - инъективное отображение множества X в множество Y и имеет место (6.24), то отображение f называется инъективным гомоморфизмом или мономорфизмом между отношениями φ и ψ.

В случае, когда f - сюръективное отображение множества X на множество Y и справедливо (6.24), то отображение f называется сюръективным гомоморфизмом или эпиморфизмом.

Наконец, когда f - биекция и выполняется (6.24), то отображение f называется биективным гомоморфизмом или изоморфизмом между отношениями φ и ψ.

Рассмотрим примеры морфизмов между некоторыми отношениями. Пусть заданы отношения $\varphi = (X,F)$, $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\}$, $F=\{<x_1,x_2>, <x_1,x_3>, <x_2,x_4>, <x_2,x_5>, <x_3,x_3>, <x_5,x_1>\}$ и $\psi = (Y,P)$, $Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5\}$, $P=\{<y_1,y_1>, <y_1,y_2>, <y_1,y_3>, <y_2,y_3>, <y_3,y_1>, <y_3,y_3>, <y_3,y_4>, <y_3,y_5>, <y_4,y_5>, <y_5,y_5>\}$.

Если между множествами X и Y существует отображение $f: X \to Y$, такое, что $f(x_1)=y_3$, $f(x_2)=y_1$, $f(x_3)=y_5$, $f(x_4)=y_1$, $f(x_5)=y_3$, то отображение f, по определению, является гомоморфизмом между отношениями φ и ψ. Чтобы убедиться в этом, необходимо для любой пары $x_i, x_j \in X$ показать справедливость (6.24).

Покажем, например, выполнение условия (6.24) для элементов $x_2, x_4 \in X$. Образом элемента x_2 при отображении f является элемент $y_1 \in Y$, а элементу x_4 также соответствует элемент y_1. Нетрудно убедиться, что истинны высказывания $x_2 \varphi x_4$ и $y_1 \psi y_1$, поскольку

$<x_2,x_4>\in F$, и $<y_1,y_1>\in P$. Следовательно, дня элементов $x_2,x_4\in X$ условие (6.24) имеет место.

Граф отношений φ и ψ отображения *f* показан на рис.6.12.

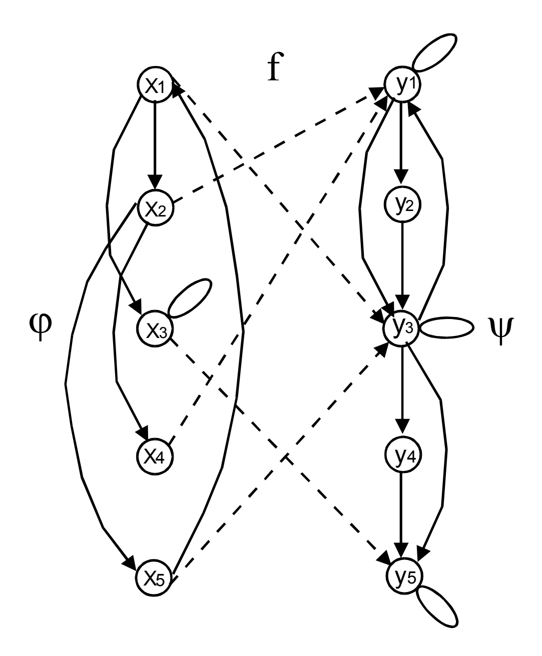


Рис.6.12. Гомоморфизм

Здесь дуги, соответствующие графикам отношений φ и ψ изображены сплошными линиями, а дуги, соответствующие графику отображения *f*, - пунктирными линиями.

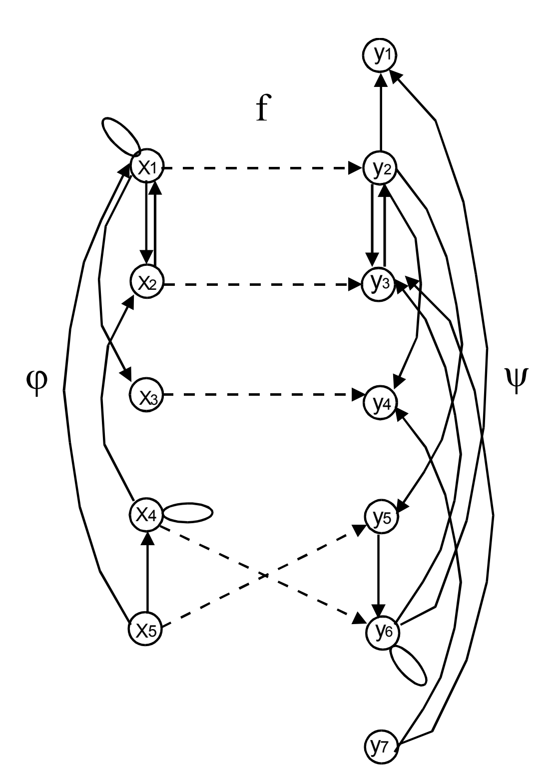


Рис.6.13. Мономорфизм

Так как между отношениями φ и ψ установлен гомоморфизм *f*, то на графе каждой дуге с началом x_i и концом x_j ($x_i, x_j \in X$) отношения φ соответствует дуга с началом $f(x_i)=y_k$ и концом $f(x_j)=y_s$ ($y_k, y_s \in Y$) отношения ψ.

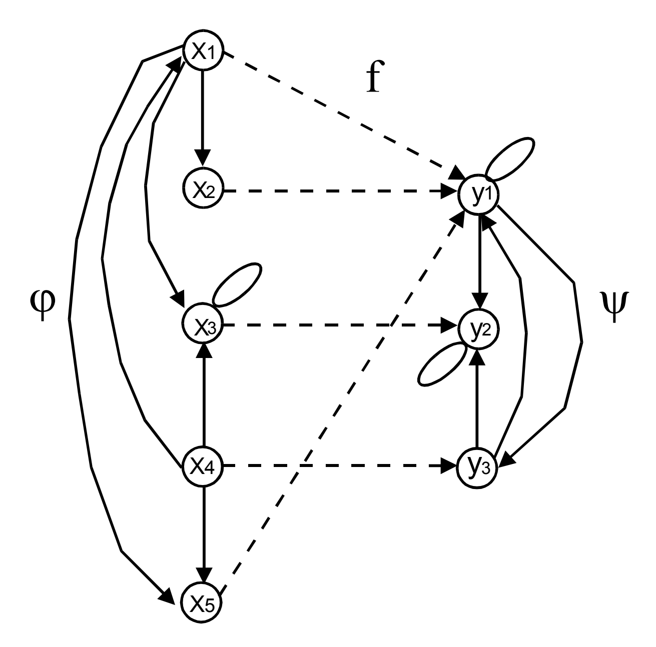


Рис.6.14. Эпиморфизм

Примеры мономорфизма, эпиморфизма и изоморфизма между некоторыми отношениями φ и ψ показаны соответственно на рис. 6.13, 6.14 и 6.15.

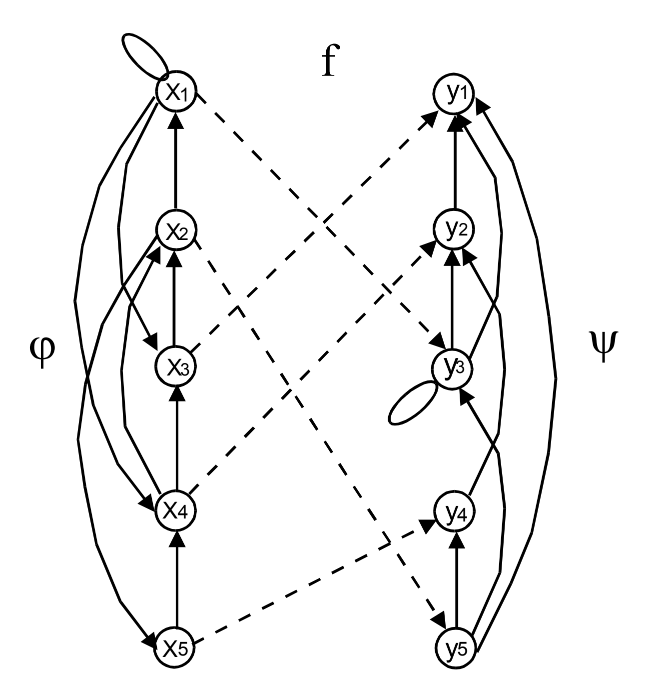


Рис.6.15. Изоморфизм

6.5. Основные свойства отношений

Рассмотрим теперь характерные только для отношений свойства, совокупность которых позволяет определять типы реальных отношений, заданных на множествах, представляющих различные объекты. К таким свойствам относятся рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность и связанность. Пусть дано произвольное отношение $\varphi = (X,F)$.

Отношение φ называется ***рефлексивным***, если для любого $x \in X$ истинно высказывание

$$x \, \varphi \, x. \tag{6.25}$$

Другими словами, график F рефлексивного отношения φ содержит диагональ множества X, т.е. $\Delta_x \subseteq F$. На графе рефлексивного отношения φ при каждой вершине имеется петля. Матрица смежности рефлексивного отношения φ содержит все единичные элементы на главной диагонали.

Заметим, что рефлексивное отношение всегда сюрьективно и всюду определенно.

Отношение $\varphi = (X,F)$ называется ***нерефлексивным***, если истинно высказывание

$$\rceil ((\forall \, x \in X)(x \, \varphi \, x)),$$

которое на основании (2.22.) приводит к высказыванию

$$(\exists \, x \in X) \rceil (x \varphi \, x).$$

Таким образом, если существует хотя бы один элемент x из X, для которого свойство рефлексивности не имеет места, то отношение φ не рефлексивно.

Частным видом нерефлексивных отношений является ***антирефлексивное*** отношение.

Отношение $\varphi = (X, F)$ называется антирефлексивным, если

$$(\forall \, x \in X) \rceil (x \, \varphi \, x). \tag{6.26}$$

Иначе говоря, график антирефлексивного отношения φ не содержит элементов диагонали множества X, т.е. $\Delta_x \cap F = \varnothing$. Граф антирефлексивного отношения φ не содержит ни одной петли, а в матрице R_φ такого отношения в главной диагонали нет ни одного единичного элемента.

На рис. 6.16 показаны соответственно рефлексивное, нерефлексивное и антирефлексивное отношения.

Отношение $\varphi = (X,F)$ называется ***симметричным***, если

$$(\forall\, x, y \in X)(\, x\varphi\, y \to y\varphi\, x). \qquad (6.27)$$

Другими словами, график F симметричного отношения также симметричен, т.е. $F=F^{-1}$. Граф симметричного отношения φ обладает свойством: если какая–либо пара вершин соединена дугой, то между ними обязательно имеется дуга с противоположной ориентацией. Матрица смежности R_φ симметричного отношения φ симметрична относительно главной диагонали.

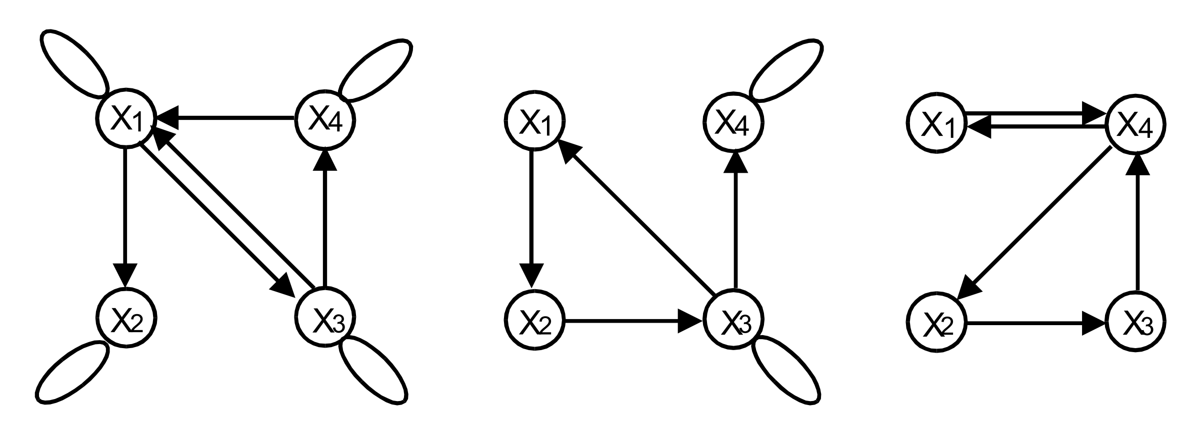


Рис.6.16. Графы рефлексивного, нерефлексивного и антирефлексивного отношений

Отношение $\varphi = (X,F)$ называется ***несимметричным***, если истинно высказывание

$$\rceil((\,\forall\, x,y \in X)(\, x\varphi\, y \to y\varphi x\,)),$$

которое по (2.22) преобразуется к виду

$$(\exists\, x,y \in X)\ \rceil(x\varphi\, y \to y\varphi\, x\,).$$

Откуда получаем высказывание

$$(\exists\, x, y \in X)\ (x\ \varphi\ y \to \rceil(y\ \varphi\ x\,).$$

Отношение $\varphi = (X,F)$ называется ***асимметричным***, если

$$(\,\forall\, x,y \in X)[\, x\ \varphi\ y \to \rceil(y\ \varphi\ x\,)]. \qquad (6.28)$$

График ассиметричного отношения обладает свойством $F \cap F^{-1} = \varnothing$. На графе асимметричного отношения, между двумя различными вершинами не может быть двух дуг с противоположной ориентацией. Матрица R_φ асимметричного отношения φ обладает следующим

свойством: все элементы главной диагонали равны нулю, и если какой-либо элемент обязательно равен нулю.

Из (6.26) следует, что любое асимметричное отношение является в то же время антирефлексивным.

Отношение φ = (X,F) называется ***антисимметричным***, если

$$(\forall x,y\in X)((x\varphi\, y\ \&\ x\neq y)\rightarrow\rceil(y\ \varphi\ x)). \qquad (6.29)$$

Антисимметричное отношение можно определить также, используя следующее эквивалентное (6.27) высказывание

$$(\forall x,y\in X)(x\varphi y\ \&\ y\varphi x\rightarrow x=y). \qquad (6.30)$$

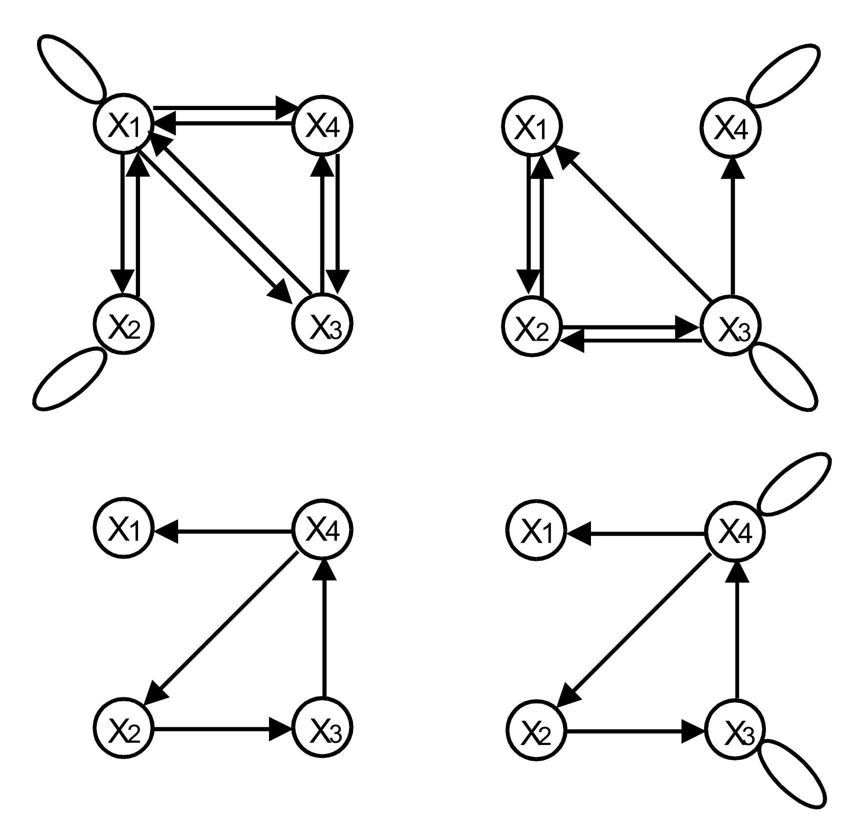


Рис.6.17. Графы симметричного, несимметричного, асимметричного и антисимметричного отношений

График антисимметричного отношения обладает свойством $F\cap F^{-1}\subseteq\Delta_x$. Граф антисимметричного отношения отличается от графа асимметричного отношения тем, что он может содержать петли. Матрица R_φ такого отношения, в отличие от матрицы смежности асимметричного отношения, может содержать единичные элементы в главной диагонали.На рис.6.17 показаны соответственно симметричное, не симметричное, асимметричное и антисимметричное отношения.

Отношение φ=(*X*,*F*) называется ***транзитивным***, если

$$(\forall\ x,y,z \in X)(x\ \varphi\ y\ \&\ y\ \varphi\ z \to x \varphi\ z). \qquad (6.31)$$

График транзитивного отношения обладает свойством $F \circ F \subseteq F$. Если на графе транзитивного отношения для любых трех вершин имеются дуги, идущие из вершины x в вершину y и из вершины y в вершину z, то обязательно от вершины x должна идти дуга к вершине z. Подобная закономерность существует в матрице R_φ, задающей транзитивное отношение.

В случае, когда (6.31) не выполняется, то отношение φ называется ***не транзитивным***.

На рис.6.14 показаны транзитивное и не транзитивное отношения.

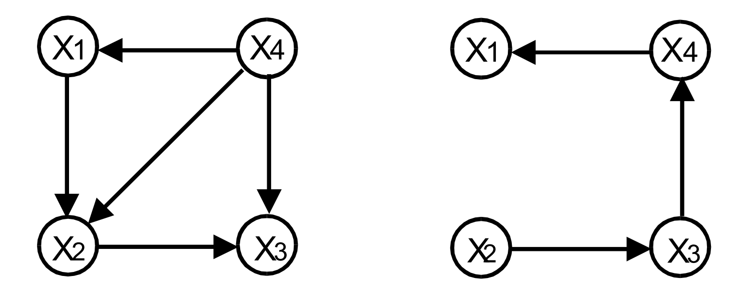


Рис.6.18. Графы транзитивного и не транзитивного отношений

Отношение $\varphi=(X,F)$ называется ***связанным***, если

$$(\forall x,y \in X)(x \neq y \to x\varphi\ y \vee y\ \varphi\ x). \qquad (6.32)$$

Для графика связанного отношения можно записать $X^2 \setminus \Delta_x \subseteq F \cup F^{-1}$.

На графе связанного отношения, между любой парой различных вершин обязательно имеется хотя бы одна дуга. В матрице R_φ такого отношения по крайней мере один из любых симметричных относительно главной диагонали элементов равен единице.

В случае, когда (6.32) не выполняется, то отношение φ называется ***не связанным***, при этом истинно высказывание

$$\rceil((\forall\ x,y \in X)\ (x \neq y \to x\varphi\ y \vee y\varphi\ x).$$

Откуда получаем

$$(\exists\ \mathrm{x,y} \in \mathrm{X})\ (\mathrm{x} \neq \mathrm{y} \& \rceil(\mathrm{x}\varphi\ \mathrm{y})\ \& \rceil(\ \mathrm{y}\ \varphi\ \mathrm{x})).$$

На рис.6.19 показаны связанное и несвязанное отношения.

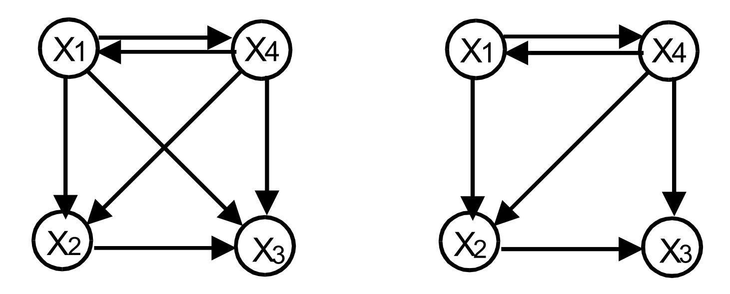


Рис.6.19. Графы связанного и несвязанного отношений

Описанные выше свойства называются основными свойствами отношений. Любое конкретное отношение обладает определенной совокупностью этих свойств. Рассмотрим некоторые примеры. Полное отношение φ_n рефлексивно, симметрично, транзитивно и связанно. Тождественное отношение φ_Δ рефлексивно, симметрично, антисимметрично, транзитивно, несвязанно, если X содержит больше одного элемента. Отношение с пустым графиком $\varphi_\varnothing$ антирефлексивно, симметрично, антисимметрично, транзитивно и несвязанно, если множество *X* содержит больше одного элемента. Отношение $\varphi=(X,F)$, показанное на рис.6.20, нерефлексивно, несимметрично, антисимметрично, нетранзитивно и несвязанно.

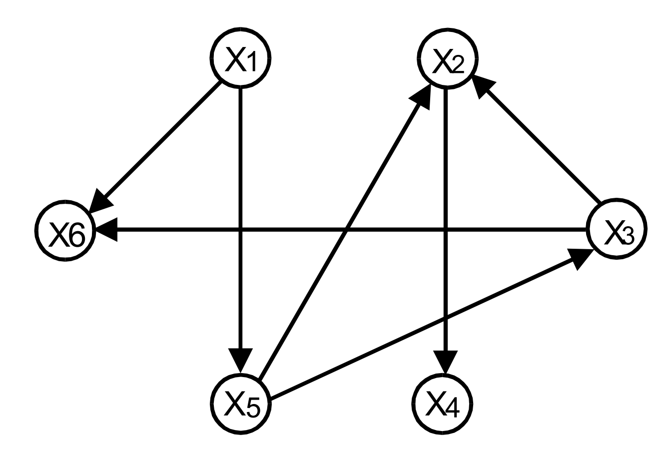


Рис.6.20.

Перейдем к рассмотрению отношений, обладающих определенной совокупностью свойств. К таким отношениям относятся отношение эквивалентности, отношение толерантности и отношения различных порядков.

6.6. Отношение эквивалентности

Отношение $\varphi=(X,F)$ называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Другими словами, если $\varphi=(X,F)$ - отношение эквивалентности, то справедливо

$$(\forall\ x\in X)\ (x\ \varphi\ x),$$

$(\forall\ x,y \in X)\ (x\ \varphi\ y \rightarrow y\ \varphi\ x)$,

$(\forall\ x,y,z \in X)\ (x\ \varphi\ y\ \&\ y\ \varphi\ z \rightarrow x \varphi\ z)$.

Отношениями эквивалентности являются полное отношение φ_n и тождественное отношение φ_Δ на множестве X.

Отношение эквивалентности интуитивно соответствует принятому понятию одинаковости некоторых объектов относительно какого-либо свойства.

Например, отношение “быть на одном факультете” на множестве студентов института, отношение “сидеть в одном ряду” на множестве зрителей в театре, отношение “быть прообразом одного и того же элемента при сюръективном отображении” на области отправления этого отображения являются отношениями эквивалентности.

Говорят, что отношение $\varphi=(X,F)$ на множестве X и разбиение $\Im\Im\Im$ множества X сопряжены, если истинно высказывание

$$(\forall\ x,y \in X)\ [x\ \varphi\ y \leftrightarrow (\exists A \in \Im\Im\Im)\ (x \in A\ \&\ y \in A)]. \qquad (6.33)$$

Другими словами, для любых двух элементов $x,y \in X$ справедливо, что элементы x и y находятся в отношении φ тогда и только тогда когда они принадлежат одному классу A разбиения $\Im\Im\Im$ множества X.

Нетрудно видеть, что если все элементы множества X попарно эквивалентны по отношению эквивалентности φ, то разбиение $\Im\Im\Im$, сопряженное с отношением φ, является целым, т.е. состоит из одного класса. В случае, когда каждый элемент множества X эквивалентен только сам себе по отношению эквивалентности φ, то разбиение $\Im\Im\Im$, сопряженное с этим отношением φ, является поэлементным.

Матрица смежности R_φ отношения эквивалентности φ состоит из блоков, расположенных по главной диагонали, причем все элементы каждого блока являются единицами.

Матрица R_φ отношения эквивалентности φ, сопряженного с целым разбиением, является, как нетрудно видеть, матрицей, состоящей только из единиц. Граф такого отношения обладает тем свойством, что из каждой вершины выходят дуги во все вершины, включая и данную.

Пусть, например, на множестве $X=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ задано отношение эквивалентности “иметь одинаковый остаток при делении на 3”. Тогда множество X разобьется на три класса: $A_1=\{1,4,7\}$, $A_2=\{2,5,8\}$ и $A_3=\{3,6,9\}$, содержащие эквивалентные по данному отношению элементы. Матрица R_φ этого отношения имеет вид:

$$R_{\varphi} = \begin{array}{c|ccccccccc|}
 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 3 & 6 & 9 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
7 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{array},$$

а граф показан на рис.6.21.

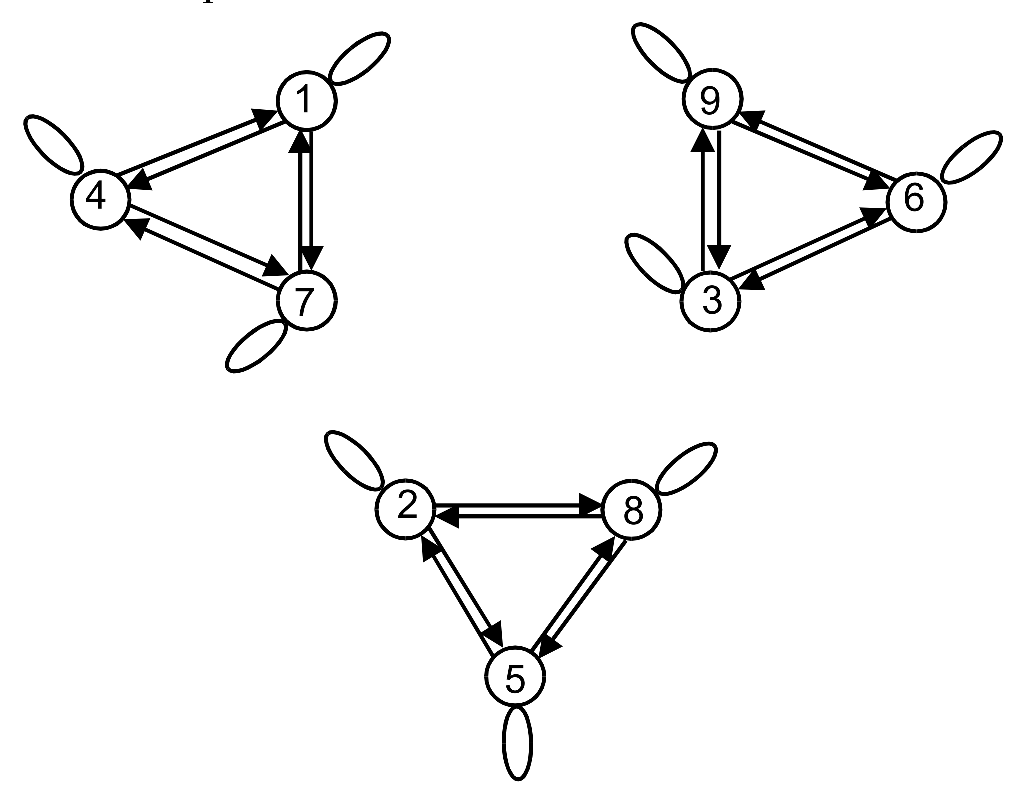


Рис.6.21. Граф отношения эквивалентности

Отметим важнейшее свойство отношения эквивалентности, позволяющее разбивать множество, на котором задано отношение эквивалентности, на непересекающиеся классы, содержащие эквивалентные между собой элементы, и в дальнейшем при преобразованиях этого множества рассматривать вместо каждого класса какой-либо один элемент этого класса. Это свойство запишем в виде утверждения.

Теорема 6.1. Если на произвольном непустом множестве X задано отношение эквивалентности $\varphi = (X,F)$, то существует единственное разбиение $\Im\Im\Im$ множества X, сопряженное с отношением φ.

Докажем это. Пусть φ =(X,F) - отношение эквивалентности. Покажем вначале, что существует разбиение $\Im\Im\Im$ множества X, сопряженное с отношением φ. Для каждого $a \in X$ построим его образ $\varphi(a)$ при данном отношении, в соответствии с (6.17), т.е. $\varphi\ (a)=\{x \in X/\ a\varphi\ x\}$. Объединение $\varphi(a)$ для всех $a \in X$ и образует $\Im\Im\Im$.

Действительно, свойство (3.48) выполняется, так как $a \in \varphi(a)$ ввиду рефлексивности φ и, следовательно, $(\forall \varphi(a) \in \Im\Im\Im)(\varphi(a) \neq \varnothing)$.

Свойство (3.49) справедливо, исходя из определения классов $\varphi(a)$.

Свойство (3.50) докажем по закону контрапозиции, т.е. покажем, что

$$(\forall \varphi(a) \in \Im\Im\Im)\ (\forall \varphi(b) \in \Im\Im\Im)(\varphi(a) \cap \varphi(b) \neq \varnothing \to \varphi(a)=\varphi(b)).$$

Пусть различные классы $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$, $\alpha, b \in X$ имеют непустое пересечение, то есть существует элемент $c \in X$, такой что $c \in \varphi(a)$ и $c \in \varphi(b)$. Отсюда истинны высказывания $a\varphi c$ и $b\varphi c$. Так как φ симметрично, то истинно высказывание $c\varphi b$ и, следовательно, ввиду транзитивности φ получаем истинность $a\varphi b$. Поэтому элементы a и b лежат в одном классе и классы $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$ совпадают. Свойство (3.51) вытекает из определения классов $\varphi(a)$ и рефлексивности отношения φ, так как разбиение $\Im\Im\Im$ образуется объединением множеств $\varphi(a)$ для всех $a \in X$.

Отношение φ и разбиение $\Im\Im\Im$ на множестве X сопряжены по способу построения разбиения $\Im\Im\Im$, поскольку в каждый класс $\varphi(a) \in \Im\Im\Im$ отнесены элементы, эквивалентные между собой.

Покажем теперь, что разбиение $\Im\Im\Im$, сопряженное с отношением φ, единственно. Докажем это от противного. Пусть существует два различных разбиения $\Im\Im\Im_1$ и $\Im\Im\Im_2$, сопряженные с отношением φ. Тогда имеются два таких элемента a, $b \in X$, которые в разбиении $\Im\Im\Im_1$ входят в один класс, а в разбиении $\Im\Im\Im_2$ в разные. Поскольку a и b находятся в одном классе $\Im\Im\Im_1$, то истинно $a \in b$. Так как отношение φ сопряжено также с разбиением $\Im\Im\Im_2$, то a и b должны находиться в одном классе разбиения $\Im\Im\Im_2$. Получили противоречие.

Следовательно, разбиение $\Im\Im\Im$, сопряженное с отношением эквивалентности φ, единственно. Этим теорема 6.1. доказана.

Подобно предыдущему может быть доказано следующее утверждение. Для любого разбиения $\Im\Im\Im$ множества X существует единственное отношение эквивалентности φ на множестве X, сопряженное с этим разбиением.

Разбиение $\Im\Im\Im$, сопряженное с отношением отношением эквивалентности φ на множестве X, называют фактормножеством множества X по отношению эквивалентности φ и обозначают $X\backslash\varphi$, а отображение $h{:}X \rightarrow X\backslash\varphi$, при котором каждый элемент $x\in X$ отображается в класс, содержащий этот элемент, называют естественным гомоморфизмом между X и $X\backslash\varphi$.

Пример. Пусть на множестве $X=\{a,b,c,d,e\}$ задано разбиение $\Im\Im\Im=\{A_1,A_2,A_3\}$, $A_1=\{a,c\}$, $A_2=\{b,d\}$, $A_3=\{e\}$. Тогда оно определяет сопряженное с ним отношение эквивалентности $\varphi=(X,F)$, у которого $F=\langle a,a\rangle$, $\langle a,c\rangle$, $\langle c,a\rangle$, $\langle c,c\rangle$, $\langle b,b\rangle$, $\langle b,d\rangle$, $\langle d,b\rangle$, $\langle d,d\rangle$, $\langle e,e\rangle$. Нетрудно видеть, что каждый класс разбиения порождает полное отношение на этом классе. Граф отношения эквивалентности φ показан на рис. 6.22.

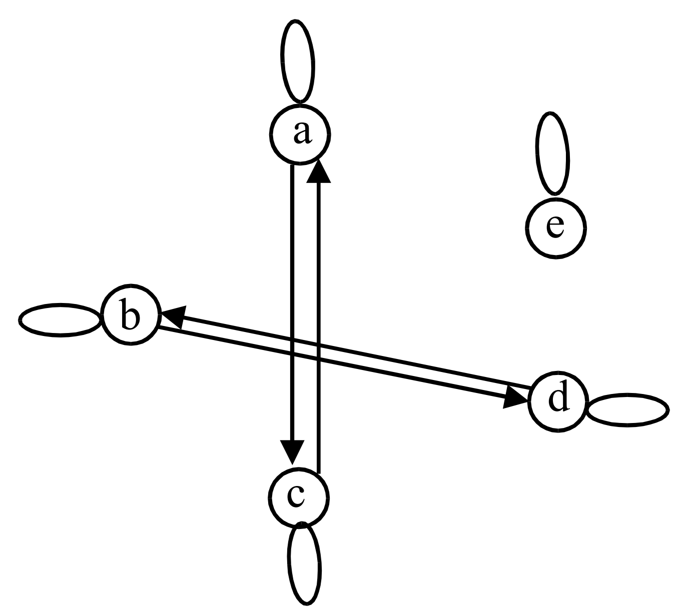


Рис.6.22. Граф отношения эквивалентности

Поскольку $X\backslash\varphi=\{A_1, A_2, A_3\}$, то естественный гомоморфизм $h{:}X\rightarrow X/\varphi$ задается в виде $h(a)=A_1$, $h(b)=A_2$, $h(c)=A_1$, $h(d)=A_2$, $h(e)=A_3$.

6.7. Отношение толерантности

Отношение $\tau=(X,F)$ называется отношением толерантности, если оно рефлексивно и симметрично. Иначе говоря, если $\tau=(X,F)$ - отношение толерантности, то справедливо

$$(\forall x\in X)(x\tau x),$$
$$(\forall x,y\in X)(x\tau y \to y\tau x).$$

Поскольку для этого отношения транзитивность не является непременным условием, то очевидно, что отношение эквивалентности является частным случаем отношения толерантности.

Отношение толерантности интуитивно соответствует понятию сходства двух объектов относительно какого-либо их свойства. Каждый объект сходен сам с собой (рефлексивность), а сходство двух объектов не зависит от порядка их сравнения (симметричность).

Пример. Отношение "быть похожим" на множестве {папа, дочь, мама} является толерантностью, поскольку каждый из них похож сам на себя в данное время (рефлексивность), папа похож на дочь, а дочь на папу (симметричность), дочь похожа на маму, и наоборот (симметричность). Но это не означает, что папа похож на маму или мама на папу (нетранзитивность). Отметим, однако, что отсутствие транзитивности не обязательно, поскольку возможны семьи, где папа и мама похожи. Другим примером отношения толерантности является отношение "находиться на растоянии не больше r" на конечном множестве точек плоскости. Это отношение также нетранзитивно. Примерами транзитивных отношений толерантности являются любые отношения эквивалентности.

По аналогии с разбиением, говорят, что отношение $\tau=(X,F)$ на множестве X и покрытие $\Re$ множества X сопряжены, если истинно высказывание

$$(\forall x,y\in X)(x\tau y \leftrightarrow (\exists A\in\Re)(x\in A \;\&\; y\in A). \qquad (6.34)$$

Иначе говоря, любые два элемента x и y находятся в отношении τ тогда и только тогда, когда они принадлежат одновременно хотя бы одному классу покрытия множества X.

Пример. Пусть на множестве $X=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ задано толерантное отношение "иметь общий делитель, не равный единице". Тогда покрытие $\Re$, сопряженное с данным отношением, имеет вид $\Re=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$, где $A_1=\{2,4,6,8,10\}$, $A_2=\{3,6,9\}$, $A_3=\{5,10\}$, $A_4=\{7\}$,

причем каждый класс покрытия содержит толерантные элементы. Матрица R_τ данного толерантного отношения запишется

R_τ =

	5	10	8	4	2	6	3	9	7
5	1	1	0	0	0	0	0	0	0
10	1	1	1	1	1	1	0	0	0
8	0	1	1	1	1	1	0	0	0
4	0	1	1	1	1	1	0	0	0
2	0	1	1	1	1	1	0	0	0
6	0	1	1	1	1	1	1	1	0
3	0	0	0	0	0	1	1	1	0
9	0	0	0	0	0	1	1	1	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	1

,

а граф этого отношения показан на рис.6.23.

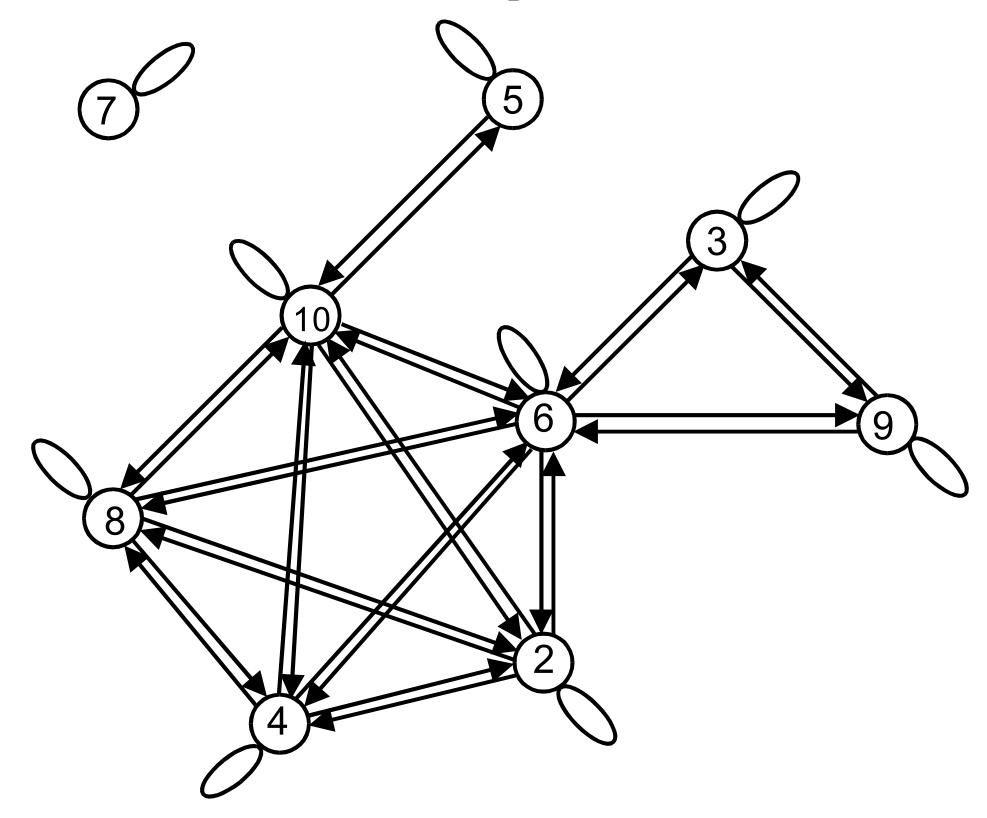


Рис.6.23. Граф отношения толерантности

Докажем следующее предложение.

Теорема. 6.2. Если на произвольном непустом множестве X задано отношение толерантности $\tau=(X,F)$, то существует покрытие $\mathfrak{R}$ множества X, сопряженное с отношением τ.

Доказательство. Пусть $\tau=(X,F)$ - отношение толерантности. Покажем, что существует по крайней мере одно покрытие,

сопряженное с отношением τ. Для каждого $a \in X$ построим класс толерантности A, все элементы которого попарно толерантны. Для этого находим $\tau(a)=\{x \in X \,/\, a \tau x\}$. Очевидно, что $\tau(a) \neq \varnothing$, так как $a \in \tau(a)$ в виду рефлексивности отношения τ. Если $\tau(a)$ состоит из единственного элемента a, то класс толерантности A совпадает с $\tau(a)$, т.е. $A=\{a\}$. Если же существует $b \in \tau(a)$, $b \neq a$, то включаем его в класс толерантности на данном шаге $A=\{a,b\}$. Далее определяем $\tau(b)$ и находим $\tau(a) \cap \tau(b)$. Если $\tau(a) \cap \tau(b)=\{a,b\}$, то класс A сформирован. Если же существует $c \in (\tau(a) \cap \tau(b))$, $c \neq a$, $c \neq b$, то, включая его в класс А, получаем $A=\{a,b,c\}$. Продолжаем описанную процедуру до тех пор, пока класс толерантности A, сформированный на данном шаге, не совпадает с классом, сформированным на предыдущем шаге. Объединение классов A для всех $a \in X$ и образует покрытие R множества X.

Действительно, свойство (3.45) выполняется, так как по построению классов толерантности $(\forall A \in \Re)(A \neq \varnothing)$. Свойство (3.46) справедливо, поскольку каждый класс A сформирован из элементов множества X в соответствии с выражением (6.22). Поэтому $(\forall A \in \Re)(A \subseteq \mathrm{X})$. Свойство (3.47) вытекает из построения классов толерантности A и рефлексивности отношения τ , так как покрытие $\Re$ образуется объединением классов A для всех $a \in X$. Отношение τ и покрытие $\Re$ множества X сопряжены по способу построения покрытия R, поскольку в каждый класс покрытия входят элементы, толерантные друг с другом.

Нетрудно видеть, что отношение толерантности τ на классе покрытия $A \subseteq X$ обладает свойством транзитивности, хотя на всем множестве X отношение τ в общем случае не обязательно транзитивно. Отсюда вытекает тот факт, что классы толерантности могут иметь непустое пересечение. Кроме того, если из каждого класса толерантности исключить элементы, принадлежащие более чем одному классу, то получим классы эквивалентности, т.е. каждый класс толерантности включает в себя класс эквивалентности.

Можно доказать утверждение, что для любого покрытия множества X существует отношение толерантности τ на множестве X, сопряженное с этим покрытием. Например, пусть на множестве $X=\{a,b,c,d,e\}$ задано покрытие $\Re=\{A_1,A_2,A_3\}$, $A_4=\{a,c,e\}$, $\mathrm{A}_2=\{b,c,d\}$, $A_3=\{d,e\}$. Тогда это покрытие определяет сопряженное с ним отношение толерантности $\tau=(X,F)$, график которого $F=\{\langle a,a\rangle, \langle a,c\rangle,$

$\langle a,e\rangle$, $\langle c,a\rangle$, $\langle c,c\rangle$, $\langle c,e\rangle$, $\langle e,a\rangle$, $\langle e,c\rangle$, $\langle e,e\rangle$, $\langle b,b\rangle$, $\langle b,c\rangle$, $\langle b,d\rangle$, $\langle c,b\rangle$, $\langle c,d\rangle$, $\langle d,b\rangle$, $\langle d,c\rangle$, $\langle d,d\rangle$, $\langle d,e\rangle$, $\langle e,d\rangle\}$. Нетрудно видеть, что каждый класс покрытия порождает полное отношение на этом классе.

Покрытие $\Re^*=\{A_1,A_2,...,A_l\}$ множества X, сопряженное с отношением толерантности τ, называется базисом, если для всякой пары $x,y\in X$, связанной отношением толерантности τ, существует класс $A_j\in\Re^*$ такой, что $x\in A_j$ и $y\in A_j$, а удаление хотя бы одного класса из $\Re^*$ приводит к невыполнению этого свойства. Иначе говоря, каждый класс $A_j\in\Re^*$ содержит такие два элемента $x,y\in X$, связанные отношением τ, которые не содержатся вместе ни в одном другом классе из $\Re^*$. Любое покрытие, сопряженное с отношением толерантности τ, содержит базис. Для его выделения необходимо удалить классы, не содержащие хотя бы одну пару элементов, принадлежащую только этому классу.

Необходимо отметить, что в общем случае с отношением толерантности $\tau=(X,F)$ может быть сопряжен не единственный базис. Например, пусть дано отношение толерантности $\tau=(X,F)$, показанное на рис.6.24.

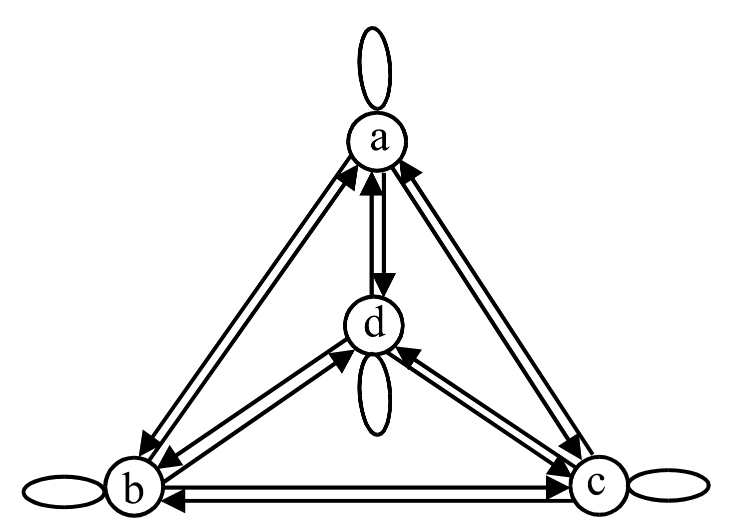


Рис.6.24. Граф отношения толерантности

С этим отношением сопряжены базисы: $\Re^*_1=\{A_1,A_2,A_3\}$, где $A_1=\{a,b,d\}$, $A_2=\{b,c,d\}$, $A_3=\{c,d,a\}$, $\Re^*_2=\{A_1,A_2,A_4\}$, у которого классы A_1 и A_2 совпадают с соответствующими классами R^*_1, а $A_4=\{a,b,c\}$, $\Re^*_3=\{A_2,A_3,A_4\}$, $\Re^*_4=\{A_1,A_3,A_4\}$.

6.8. Отношения порядка

Отношение $\delta=(X,F)$ называется ***отношением строгого порядка***, если оно антирефлексивно, ассиметрично и транзитивно. Иначе говоря, если $\delta=(X,F)$ - отношение стогого порядка на X, то имеет место

$$(\forall x\in X)\rceil(x\delta x);$$
$$(\forall x,y\in X)[x\delta y \to \rceil(y\delta x)];$$
$$(\forall x,y,z\in X)(x\delta y \; \& \; y\delta z \to x\delta z).$$

Нетрудно показать, что свойство ассиметричности следует из антирефлексивности и тразитивности отношения δ. Действительно, предположим противное. Тогда, используя отрицание (6.28), получим

$$\rceil((\forall x,y\in X)[x\delta y \to \rceil(y\delta x)] \to (\exists x,y\in X)\rceil[x\delta y \to \rceil(y\delta x)] \to (\exists x,y\in X)[x\delta y \; \& \; y\delta x].$$

Из последнего выражения и транзитивности отношения δ вытекает $x\delta x$, что противоречит антирефлексивности отношения δ.

Если отношение строгого порядка связано, то оно называется ***отношением совершенного строго порядка***. Иначе говоря, если $\delta=(X,F)$ - совершенный строгий порядок, то как следует из (6.32) и (6.28), для любой пары различных элементов $x,y\in X$ истинно либо $x\delta y$, либо $y\delta x$.

Отношением строгого порядка является, например, отношение строгого включения множеств, заданное на семействе всех подмножеств данного непустого множества. Отношениями совершенного строгого порядка являются отношения “<“ или “>“, заданные на любом конечном непустом подмножестве множества чисел натурального ряда.

Пусть $X=\{a,b,c,d,e\}$, тогда $\delta_1=(X,F)$ - строгий порядок, если $F=\{<a,b>, <b,c>, <a,c>, <a,d>, <a,e>, <b,d>, <b,e>, <c,e>\}$, а $\delta_2=(X,P)$ - совершенный строгий порядок, если $P=\{<a,b>, <a,c>, <a,d>, <a,e>, <c,b>, <c,d>, <d,b>, <e,b>, <e,c>, <e,d>\}$. Графы приведенных выше отношений показаны соответственно на рис.6.25 и 6.26.

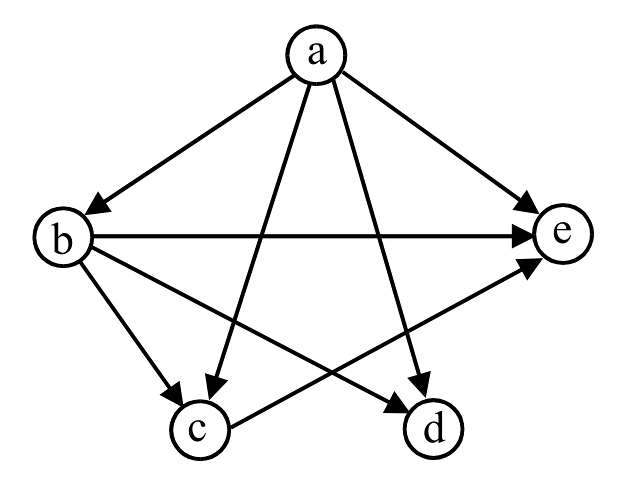


Рис.6.25. Граф отношения строгого порядка

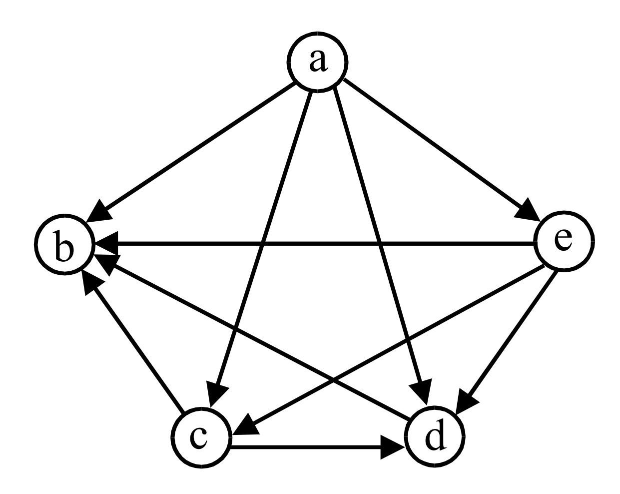


Рис.6.26. Граф отношения совершенного строгого порядка

Структура множества, на котором задано отношение совершенного строго порядка, обладает интересным свойством, которое сформулируем в виде следующего предложения.

Теорема 6.3. Если на множестве X, содержащем n - элементов, задано отношение совершенного строго порядка $\delta=(X,F)$, то элементам $x\in X$ можно приписать такие номера $i\in I=\{1,2...,n\}$, что $x_i\delta x_j$, x_i, $x_j\in X$, $i,j\in I$, истинно тогда и только тогда, когда $i< j$.

Для доказательства теоремы опишем процедуру, в результате которой каждому $x\in X$ будет приписан номер $i\in I$, удовлетворяющий сформулированному выше условию. Предварительно покажем, что в множестве X, на котором задано отношение совершенного строгого порядка δ, существует единственный элемент x, удовлетворяющий свойству

$$(\forall y\in X)(y\neq x \to x\delta y), \qquad (6.35)$$

и единственный элемент z, удовлетворяющий свойству

$$(\forall\ y\in X)(y\neq x\rightarrow y\delta\ z). \qquad (6.36)$$

Элемент x, обладающий свойством (6.35), называется ***наименьшим***, а элемент z, обладающий свойством (6.36), называется *наибольшим* элементом множества X.

Выберем произвольный элемент $y_1\in X$. Если $(\forall y\in X \setminus \{y_1\})(y_1\delta y)$, то элемент y_1 - наименьший. В противном случае, так как δ - совершенный строгий порядок, то в X существует такой $y_2 \neq y_1$, для которого истинно $y_2\delta y_1$. Либо y_2 - наименьший элемент, либо существует такой $y_3 \neq y_2$, для которого $y_3\delta y_2$. Продолжая процесс аналогично, на $к$-ом шаге получим цепочку

$$y_к\ \delta\ y_{к\text{-}1},\ y_{3к\text{-}1}\ \delta\ y_{к\text{-}2},\ldots,\ y_2\ \delta\ y_1.$$

Так как δ транзитивно, то каждый последующий элемент связан с любым предыдущим элементом отношением δ. Ввиду конечности множества X не более чем за n шагов, процесс выбора окончится, при этом y_n будет наименьшим элементом множества X.

Покажем теперь, что этот элемент единствен. Предположим, что существует два элемента y_n и y'_n, для которых истинно (6.35). Тогда по (6.35) одновременно истинно $y_n\delta y'_n$ и $y'_n\delta y_n$, что невозможно, поскольку δ ассиметрично.

Пусть теперь x - наименьший элемент из X, выбранный описанным выше способом, которому припишем номер 1 и обозначим через x_1. Из множества X исключим элемент x_1, получим множество $X_1=X\setminus\{x_1\}$. Поскольку $X_1\subseteq X$, то на X_1 также задан совершенный строгий порядок и, следовательно, в множестве X_1 существует наименьший элемент x, которому припишем номер 2 и обозначим через x_2. Естественно, что $x_1\delta x_2$. Исключим элемент x_2 из множества X_1, получим множество $X_2=X_1\setminus\{x_2\}$ с наименьшим элементом x_3, причем $x_2\delta x_3$. Продолжая аналогично, придем к цепочке элементов $x_1, x_2, x_3,\ldots,x_n$, в которой $x_1\delta x_2$, $x_2\delta x_3$, ..., $x_{n-1}\delta x_n$. Поскольку δ - транзитивно и асимметрично, имеем, что $x_i\delta x_j$ тогда и только тогда, когда $i< j$. Теорема доказана.

Пример. Элементам множества $X=\{a,b,c,d,e\}$, на котором задано отношение овершенного строгого порядка δ, показанное на рис.6.22, припишем нумерацию $i\in I=\{1,2,3,4,5\}$ в соответствии с изложенным выше методом. Поскольку на графе дуга идет от вершины x_i к вершине x_j в том и только в том случае , когда $x_i\delta x_j$, то вершина a, из которой дуги идут во все оставшиеся вершины, представляет собой

наименьший элемент, а вершина b, обладающая тем свойством, что в нее заходят дуги из всех остальных вершин, представляет собой наибольший элемент множества X. Припишем наименьшему элементу номер 1 и обозначим a_1. Удалим его из множества X. На графе этому соответствует удаление вершины a и всех исходящих из нее дуг. Приходим к отношению, показанному на рис. 6.27.

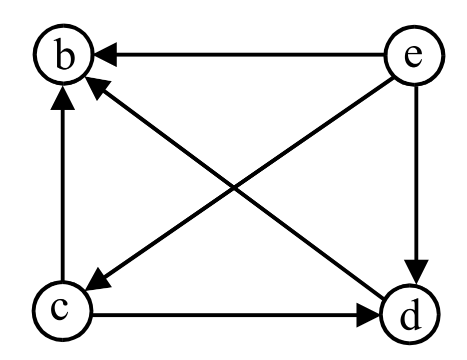


Рис.6.27. Граф отношения на множестве $X_1=X\setminus\{a\}$

Аналогично находим наименьший элемент, которым является e, поскольку из вершины e выходят дуги во все остальные вершины. Приписываем ей номер 2. Получаем e_2. Продолжая далее подобным образом, приходим к следующей нумерации элементов множества $X=\{a_1, e_2, c_3, d_4, b_5\}$. Легко проверить, что найденная нумерация удовлетворяет условию доказанной выше теоремы.

В случае, когда на множестве X задан строгий порядок δ, не являющийся совершенным, т.е.

$$(\exists x,y\in X)\ (\rceil x\delta y\ \&\ \rceil y\delta x),$$

то элементам множества X нельзя приписать номера указанным выше способом. В то же время на таком множестве X существуют минимальные и максимальные элементы. Элемент $a\in X$ называется минимальным (максимальным), если не существует элемента $y\in X$, такого, что $y\delta a$ ($a\delta y$). Нетрудно видеть, что в случае совершенного строгого порядка минимальный (максимальный) элемент множества единствен и совпадает с наименьшим (наибольшим) элементом.

Подмножество $Y\subseteq X$ называется ***максимальным совершенным***, если отношение δ задает на Y совершенный строгий порядок и не существует $Z\subseteq X$, такого, что $Y\subseteq Z$ и на котором это отношение также является совершенным строгим порядком.

Докажем теперь, что для любого $y\in X$ существует максимальное совершенное подмножество $Y\subseteq X$, содержащее y. Пусть $Y_1=\{y\}$. При этом δ на множестве Y_1 является совершенным строгим порядком,

так как условие (6.30) тривиальным образом из-за ложности посылки истинно и, следовательно, отношение δ на Y_1 связанно. Если Y_1 - максимальное совершенное подмножество, то доказательство завершено. Если же нет, то во множестве $X\backslash\{y\}$ существует элемент Z, такой, что $x\delta z$ или $z\delta x$. Присоединив элемент z к Y_1, получим множество $Y_2=\{y,z\}$, на котором задан совершенный строгий порядок. Поскольку множество X конечно, продолжая аналогично, получим максимальное совершенное подмножество Y.

Из доказанного вытекает, что для каждого $x\in X$, на котором задан строгий порядок, существует минимальный элемент a, такой, что $a\delta x$ или $a=x$. Это следует из того, что каждый $x\in X$ является элементом максимального совершенного подмножества множества X.

Нетрудно видеть, что объединение всех максимальных совершенных подмножеств образует покрытие $\Re$ множества X, классами которого как раз и являются совершенные строго упорядоченные подмножества. Как было показано ранее, с покрытием $\Re$ сопряжено отношение толерантности τ на множестве X, которое индуцировано строгим порядком δ на множестве X. Содержательно отношение τ означает выполнение свойства “принадлежать одному максимальному совершенному подмножеству” и порождается отношением δ следующим образом: $\tau=\delta\cup\delta^{-1}\cup\delta_\Delta$, где δ^{-1} - инверсия отношения δ , а δ_Δ - тождественное отношение на множестве X. Рефлексивность и симметричность отношения τ непосредственно следуют из способа его построения.

Пример. Пусть отношение δ=(X,F)- строгий порядок, заданный графом, приведенным на рис.6.28:

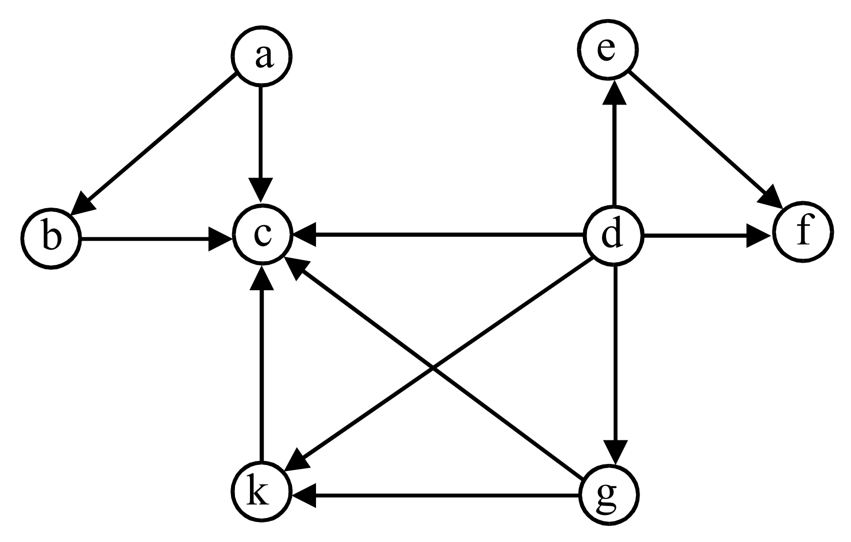


Рис.6.28. Граф отношения строгого порядка

Тогда максимальные совершенные подмножества имеют вид $Y_1=\{a,b,c\}$, $Y_2=\{c,d,g,k\}$, $Y_3=\{d,e,f\}$. В Y_1, элемент c является максимальным, а элемент a - минимальным. В Y_2 максимальным элементом является c, а минимальным - d. Классы Y_1, Y_2, Y_3 образуют, как нетрудно убедиться, покрытие $\Re$ множества X. Отношение толерантности τ, сопряженное с покрытием $\Re$ и порождаемое строгим порядком δ, показано на рис. 6.29.

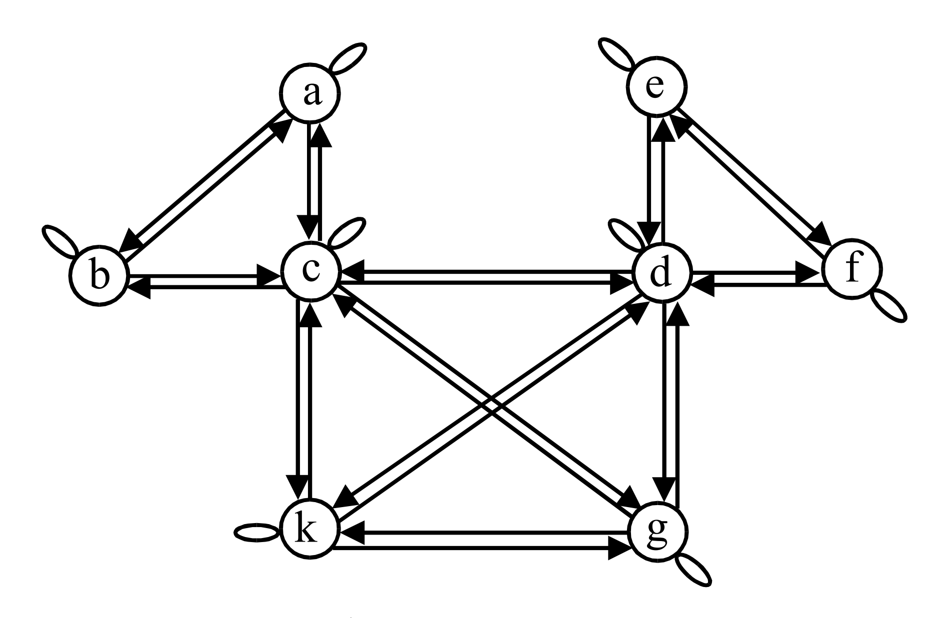


Рис.6.29. Граф отношения толерантности

Перейдем к рассмотрению нестрогих порядков. Отношение $\rho=(X,F)$ называется ***отношением нестрогого порядка***, если оно рефлексивно, ассимметрично и транзитивно. Другими словами, если $\rho=(X,F)$ - отношение нестрогого порядка на X, то имеет место

$$(\forall x\in X)(x\rho x);$$
$$(\forall x,y\in \mathrm{X})[x\rho y\ \&\ y\rho x \rightarrow x=y];$$
$$(\forall x,y,z\in X)[x\rho y\ \&\ y\rho z \rightarrow x=z].$$

Если отношение нестрогого порядка связано, то оно называется ***отношением совершенного нестрогого порядка***. Иначе говоря, если $\rho=(X,F)$ - совершенный нестрогий порядок, то для любой пары $x,y\in X$ истинно либо $x\rho y$, либо $y\rho x$.

Отношением нестрогого порядка является, например, отношение включения множеств, заданное на семействе всех подмножеств данного непустого множества. Отношением совершенного нестрогого порядка являются отношения “≤“ или “≥“, заданные на любом конечном непустом подмножестве множества чисел натурального ряда.

Пусть $X=\{a,b,c,d,e\}$, тогда $\rho_1=(X,F)$-нестрогий порядок, если $F=\{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle a,d\rangle, \langle a,e\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle b,d\rangle, \langle b,e\rangle, \langle c,c\rangle, \langle c,e\rangle, \langle d,d\rangle, \langle e,e\rangle\}$, а $\rho_2=(X,P)$ - совершенный нестрогий порядок, если $P=\{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle a,d\rangle, \langle a,e\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle c,b\rangle, \langle c,d\rangle, \langle d,d\rangle, \langle d,b\rangle, \langle e,e\rangle, \langle e,d\rangle, \langle e,c\rangle, \langle c,d\rangle\}$.

Графы рассмотренных выше отношений показаны соответственно на рис. 6.30 и 6.31.

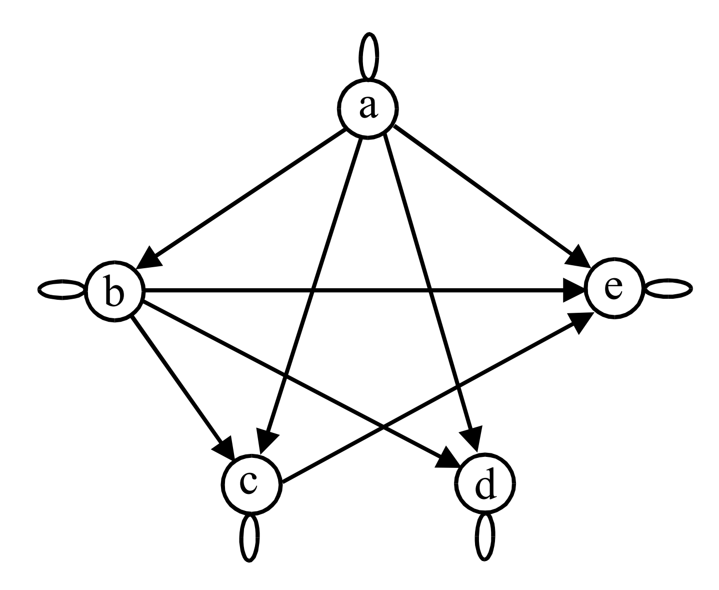


Рис.6.30. Граф отношения нестрогого порядка

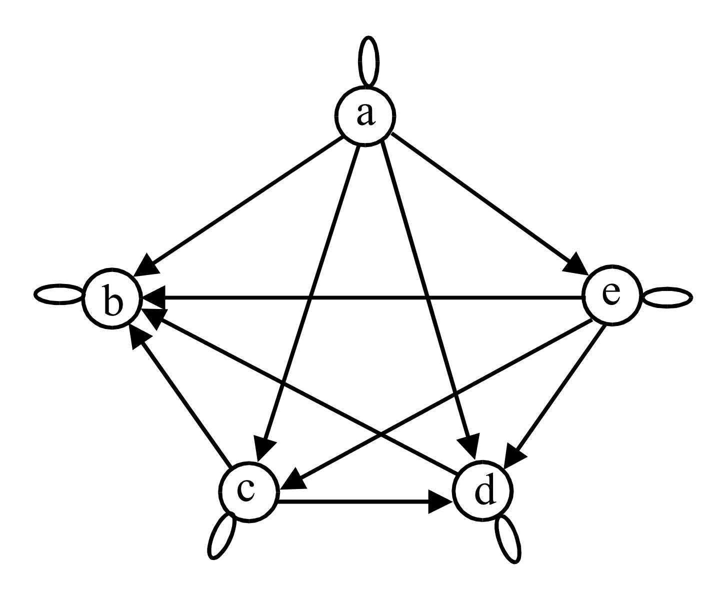


Рис.6.31. Граф отношения совершенного нестрогого порядка

Нетрудно видеть, что если $\rho=(X,F)$ - на множестве X, то $\delta=(X,F\backslash\Delta_x)$- строгий порядок, и если $\delta=(X,P)$ - строгий порядок, то $\rho=(X,P\cup\Delta_x)$- нестрогий порядок. Аналогичные утверждения справедливы и для совершенных строгих и нестрогих порядков. Эти соотношения устанавливают естественную биекцию между

множествами нестрогих и строгих порядков на множестве X, которая позволяет свободно переходить от нестрогого порядка к соответствующему ему строгому порядку на множестве X, и наоборот, и определять структуру множеств подобно тому, как это было сделано при изучении строгих порядков.

Графы отношений строгого и нестрогого, совершенного строгого и совершенного нестрогого порядков отличаются попарно друг от друга, как нетрудно убедиться, сравнив рис.6.20 и 6.25, 6.21 и 6.26, лишь петлями при каждой вершине нестрогих порядков.

Рассмотрим отношение, являющееся обобщением отношений эквивалентности и отношений нестрогого порядка, называемые отношением квазипорядка.

Отношение $\psi=(X,F)$ называется ***отношением квазипорядка***, если оно рефлексивно и транзитивно. Иначе говоря, если $\psi=(X,F)$ - отношение квазипорядка на X, то имеет место

$$(\forall x\in X)(x\psi x);$$
$$(\forall x,y,z\in X)(x\psi y \mathbin{\&} y\psi z \to x\psi z).$$

Отсюда нетрудно видеть, что приведенные ранее примера отношений эквивалентности и отношений нестрого порядка являются и примерами отношения квазипорядка.

Покажем, что каждый квазипорядок порождает как эквивалентность, так и некоторый, вообще говоря, нестрогий порядок.

Докажем следующее предложение.

Теорема 6.4. Если $\psi=(X,F)$ - квазипорядок, то отношение $\varphi=\psi\cap\psi^{-1}$ является эквивалентостью.

Доказательство. Необходимо доказать, что отношение φ рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Рефлексивность отношения φ следует из определений операций инверсии и пересечения отношений.

Покажем симметричность отношения φ. Пусть для некоторых $x,y\in X$ истинно $x\varphi y$. Запишем цепочку импликаций:

$$x\varphi y \to x(\psi\cap\psi^{-1})y \to x\psi y \mathbin{\&} x\psi^{-1}y \to y\psi^{-1} x \mathbin{\&} y\psi x \to y(\psi^{-1}\cap\psi)x \to y(\psi\cap\psi^{-1})x \to y\varphi x.$$

Для тех $x,y\in X$, которые не связаны отношением φ, симметричность следует тривиальным образом.

Докажем теперь транзитивность отношения φ. Пусть для некоторых $x,y,z\in X$ истинно $x\varphi y$ и $y\varphi z$. Необходимо показать истинность $x\varphi z$. Для этого запишем цепочку импликаций:

$$x\varphi y \;\&\; y\varphi z \rightarrow x(\psi\cap\psi^{-1})y \;\&\; y(\psi\cap\psi^{-1})z \rightarrow x\psi y \;\&\; x\psi^{-1}y \;\&\; y\psi z \;\&\; y\psi^{-1}z \rightarrow$$
$$x\psi y \;\&\; y\psi z \;\&\; x\psi^{1}y \;\&\; y\psi^{-1}z \rightarrow x\psi z \;\&\; x\psi^{-1}z \rightarrow x(\psi\cap\psi^{-1})z \rightarrow x\varphi z.$$

Для тех $x,y,z\in X$, которые не связаны отношением φ, истинность транзитивности следует тривиальным образом. Теорема доказана.

Пусть теперь X/φ - фактормножество множества X по отношению эквивалентности $\varphi=\psi\cap\psi^{-1}$. Определим отношение ρ следующим образом. Два класса A_i и A_j из X/φ находятся в отношении ρ, если в этих классах можно выбрать по представителю $x\in A_i$ и $y\in A_j$ так, чтобы было истинно $x\psi y$, где ψ - исходный квазипорядок на множестве X.

Докажем следующее предложение.

Теорема 6.5. Отношение р на множестве классов фактор-множества X/φ, является нестрогим порядком.

Доказательство. Необходимо показать, что отношение р рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Рефлексивность ρ следует из того, что отношение ψ, порождающее отношение эквивалентности φ, по которому построено фактор-множество X/φ рефлексивно. Следовательно, для любого класса $A_i\in X/\varphi$ и любого представителя $x\in A_i$ истинно $x\psi x$, а следовательно, справедливо $A_i\,\rho A_i$.

Покажем антисимметричность отношения ρ. Для этого из предположения об истинности $A_i\rho A_j$ и $A_j\rho A_i$ необходимо вынести истинность $A_i=A_j$. Из истинности $A_i\rho A_j$ и $A_j\rho A_i$ следует, что существуют такие представители $x\in A_i$ и $y\in A_j$, $x'\in A_i$ и $y'\in A_j$, что истинно $x\psi y$ и $y'\psi x'$. В то же время, поскольку y и y' принадлежат одному классу фактормножества X/φ, истинно $y\varphi y'$ или $y(\psi\cap\psi^{-1})y'$. Отсюда справедливо, что $y\psi y'$. Из истинности $x\psi y$ и $y\psi y'$ следует, что справедливо $x\psi y'$. В то же время из истинности $y\psi x'$ и $x'\psi x$ вытекает $y'\psi x$, а отсюда $x\psi^{-1}y'$. Получаем одновременную истинность $x\psi y'$ и $x\psi^{-1}y'$. Следовательно, справедливо $x(\psi\cap\psi^{-1})y'$ и x и y' принадлежат одному классу фактор-множества X/φ. Значит, $A_i\cap A_j=\varnothing$. Отсюда, вытекает $A_i = A_j$.

Докажем, наконец, транзитивность отношения ρ. Для этого необходимо из истинности $A_i\rho A_j$ и $A_j\rho A_к$ вывести истинность $A_i\rho A_к$ (Здесь классы A_i , A_j, $A_к\in X/\varphi$). Из истинности $A_i\rho A_j$ и $A_j\rho A_к$ по определению отношения ρ следует истинность $x\psi y$, для представителей $x\in A_i$ и $y_1\in A_j$, и $y_2\psi z$ для представителей $x\in A_i$ и $y_1\in A_j$, и $y_2\psi z$ для представителей $y_2\in A_j$ и $z\in A_к$. Поскольку $y_1\in A_j$ и $y_2\in A_j$, имеем, что $y_1\varphi y_2$, а так как $\varphi=\psi\cap\psi^1$, то и $y_1\psi y_2$. Из $x\psi y_1$ и $y_1\psi y_2$ ввиду транзитивности ψ истинно $x\psi y_2$ и $y_2\psi z$ вытекает $x\psi z$. Отсюда получаем, что $A_i\rho A_к$. Теорема доказана.

Между отношениями ψ на множестве X и ρ на фактормножестве X/φ существует естественный гоморфизм. При этом каждому элементу $x\in X$ сопоставляется класс $A\in X/\varphi$, которому этот элемент принадлежит. Нетрудно видеть, что если $x\in A$, $y\in B$, $A,B\in X/\varphi$, и $x\psi y$, то, по определению отношения ρ, справедливо $A\rho B$.

Примеры. Отношение ψ "быть не старше курсом" на множестве студентов S факультета является квазипорядком. В то же время отношение ψ не является эквивалентностью и не есть нестрогий порядок. Отношение $\varphi=\psi\cap\psi^{-1}$ имеет здесь смысл "быть на одном курсе", поскольку оно одновременно означает "быть не старше и не младше курсом", т.е. является отношением эквивалентности и с ним сопряжено разбиение S/φ множества студентов факультета по курсам. При этом отношение ρ соответствует порядку следования курсов в процессе обучения.

Пусть $\psi=(X,F)$ – отношение квазипорядка, граф которого представлен на рис.6.32.

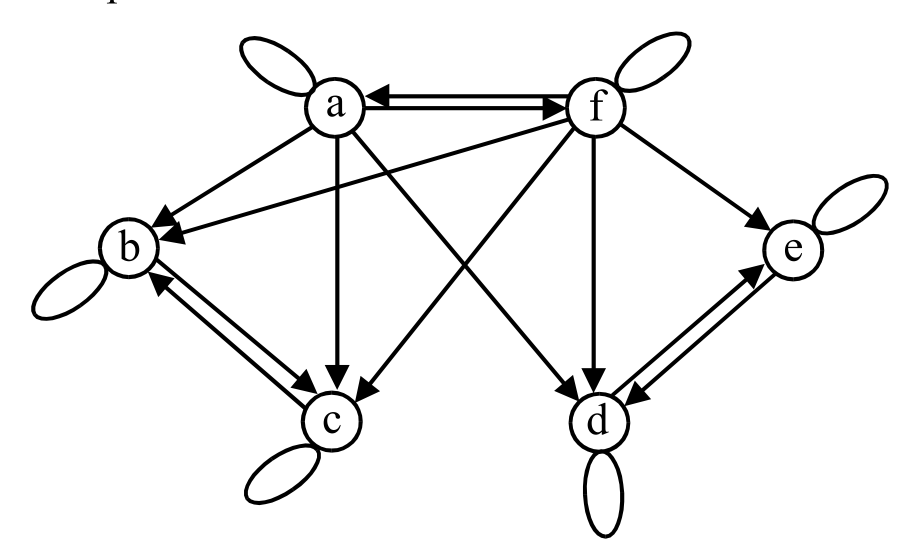


Рис.6.32. Граф отношения квазипорядка ψ

Определим отношение $\varphi=\psi\cap\psi^{-1}=(X,P)$. Здесь $P=F\cap F^{-1}$ и запишется как $P=\{<a,a>, <a,f>, <f,a>, <f,f>, <e,e>, <e,d>, <d,e>, <d,d>, <c,c>, <c,b>, <b,c>, <b,b>\}$. Отношение φ показано на рис.6.33.

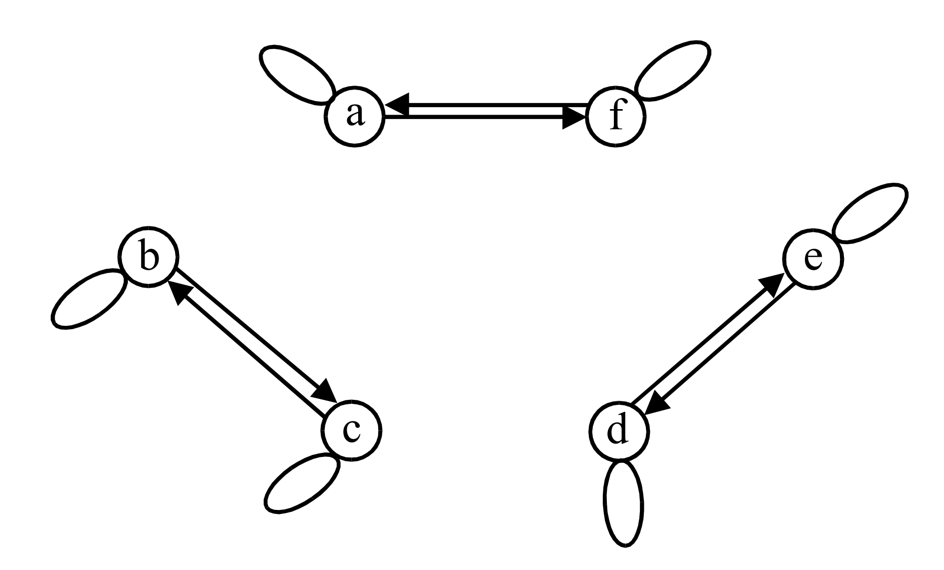


Рис.6.33. Граф отношения эквивалентности $\varphi=\psi\cap\psi^{-1}$

Запишем фактормножество X/φ. Оно определяется следующим образом: $X/\varphi=\{A_1,A_2,A_3\}$, где $A_1=\{b,c\}$, $A_2=\{a,f\}$, $A_3=\{d,e\}$. Тогда график T отношения $\rho=(X/\varphi,T)$ имеет вид $T=\{<A_1,A_1>, <A_2,A_1>, <A_2,A_2>, <A_2,A_3>, <A_3,A_3>\}$, а граф отношения ρ показан на рис. 6.34.

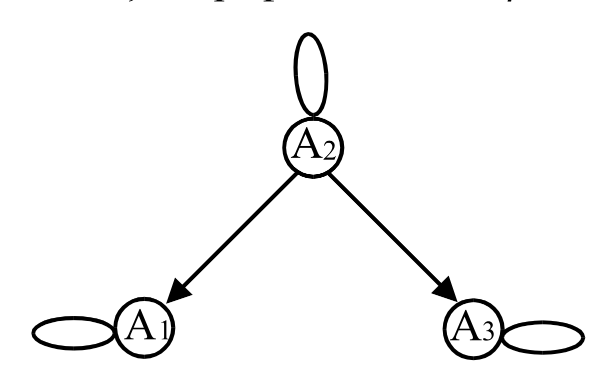


Рис.6.34. Граф отношения ρ

6.9. Контрольные вопросы

1. Что называется бинарным отношением?
2. Чем отличается понятие “отношение” от понятия “соответствие”?
3. Как строятся матрица смежности и граф отношения $\varphi=(X,F)$?
4. Как задать отношение φ с помощью логической формулы?
5. Сколько различных отношений можно определить на множестве из n элементов?

6. Какое отношение называется антитождественным?

7. Как определить операции объединения, пересечения, разности и симметрической разности над отношениями при задании отношений в виде графов и матриц смежности?

8. Что называется инверсией и композицией отношений?

9. Чему равняется инверсия композиции отношений?

10. Как определить композицию трех и более отношений?

11. Как взаимосвязаны дополнение отношения и его инверсия?

12. Как определить понятия образа и прообраза множества при композиции двух отношений?

13. Чему равняется образ прообраза множества *B* приданном отношении φ?

14. При каком условии прообраз образа множества *A* при данном отношении φ совпадает с множеством *A*?

15. Как определить понятия образа и прообраза множества для сужения отношения φ на множество *A*?

16. В каком случае композиция двух отношений φ и ψ будет являться функциональным, инъективным или биективным отношением?

17. По какой операции отношение $\varphi=(X,F)$ является гомоморфизмом?

18. Почему инъективный или сюръективный гомоморфизм на отношении $\varphi=(X,F)$ совпадает с изоморфизмом на этом отношении?

19. Чем отличается мономорфизм между отношениями $\varphi=(X,F)$ и $\psi=(Y,P)$ от эпиморфизма между этими отношениями?

20. Какое отношение называется рефлексивным, симметричным, транзитивным, связанным?

21. Может ли асимметричное или антисимметричное отношение быть в то же время рефлексивным?

22. Может ли рефлексивное отношение быть несвязанным?

23. Какими основными свойствами обладают отношения $\varphi_{\varnothing}$ и φ_{n}?

24. Какими основными свойствами обладает отношение $\varphi=(X,F)$, если $X=\{x\}$, $F=\{<x,x>\}$?

25. Какая разница между несимметричным и антисимметричным отношениями?

26. Что называется отношением эквивалентности?

27. В каком случае отношение эквивалентности φ обладает свойством связанности?

28. Как построить разбиение $\Im\Im\Im$ множества X, сопряженное с данным отношением эквивалентности $\varphi=(X,F)$?

29. Как построить отношение эквивалентности $\varphi=(X,F)$, сопряженное с данным разбиением $\Im\Im\Im$ множества X?

30. Что такое фактормножество множества X и естественный гомоморфизм между множеством X и фактормножеством?

31. Сколько отношений эквивалентности можно определить на множестве X, содержащем n элементов?

32. Чем отличается отношение толерантности от отношения эквивалентности ?

33. Почему классы покрытия, сопряженного с отношением толерантности, в общем случае могут иметь непустое пересечение?

34. Как построить покрытие множества X, сопряженное с отношением толерантности $\tau=(X,F)$?

35. Какое покрытие, сопряженное с отношением толерантности, называется базисом?

36. Как по базису построить сопряженное с ним отношение толерантности?

37. Чем отличается отношение совершенного строгого порядка от отношения строгого порядка?

38. При каком отношении на множестве X наибольший (наименьший) элемент является единственным максимальным (минимальным)?

39. Какое подмножество множества X, на котором задан строгий порядок, называется максимальным совершенным?

40. Какое отношение на множестве X индуцируется отношением совершенного строгого порядка $\delta=(X,F)$?

41. Являются ли основные свойства (рефлексивность, антисимметричность и транзитивность), определяющие отношение нестрогого порядка $\rho=(X,F)$, независимыми друг от друга?

42. Чем отличаются графики отношений нестрогих и строгих порядков?

43. Почему отношение квазипорядка $\psi=(X,F)$ является обобщением отношений эквивалентности $\varphi=(X,F)$ и нестрогого порядка $\rho=(X,F)$?

44. Какое отношение является эквивалентностью и нестрогим порядком одновременно?

45. Как образуется отношение эквивалентности, индуцированное отношением квазипорядка?

46. Какое отношение на данном множестве можно было бы назвать отношением беспорядка?

6.10. Упражнения и задачи

1. Пусть $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$.

1) Задайте некоторое отношение на этом множестве в теоретико-множественном, матричном, графическом виде и с помощью логической формулы.

2) Постройте такое отношение, которое одновременно содержит тождественное и антитождественное отношения на этом же множестве.

П. Пусть даны отношения $\varphi=(X_1,F_1)$, где $X_1=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$, $F_1=\{<x_1,x_1>, <x_1,x_2>, <x_1,x_3>, <x_2,x_1>, <x_2,x_3>, <x_2,x_4>, <x_3,x_5>, <x_4,x_2>, <x_4,x_5>, <x_5,x_5>\}$, $\varphi_2=(X_2,F_2)$, где $X_2=\{x_1,x_2,x_3,x_6\}$, $F_2=\{<x_1,x_1>, <x_1,x_2>, <x_2,x_1>, <x_2,x_3>, <x_2,x_6>, <x_3,x_1>, <x_3,x_6>\}$ и $\varphi_3=(X_3,F_3)$, где $X_3=\{x_1,x_3,x_4,x_6\}$, $F_3=\{<x_1,x_1>, <x_1,x_3>, <x_3,x_1>, <x_3,x_4>, <x_3,x_6>, <x_6,x_4>, <x_6,x_6>\}$. Найдите в теоретико-множественном, матричном и графическом виде:

1) $\varphi_1\cup\varphi_2$, $\varphi_1\cup\varphi_2\cup\varphi_3$, $\varphi_2^{-1}\cup\varphi_3^{-1}$, $\varphi_1^{-1}\cup\varphi_2^{-1}\cup\varphi_3^{-1}$;

2) $\varphi_1\cap\varphi_3$, $\varphi_1\cap\varphi_2$, $\varphi_1\cap\varphi_2\cap\varphi_3$, $\varphi_1^{-1}\cap\varphi_2^{-1}$, $(\varphi_1\cap\varphi_2)^{-1}$;

3) $\varphi_1\setminus\varphi_2$, $\varphi_2\setminus\varphi_1$, $\varphi_1\setminus(\varphi_2\setminus\varphi_3)$, $(\varphi_1^{-1}\setminus\varphi_2^{-1})^{-1}$;

4) $\varphi_1\Theta\varphi_2$, $\varphi_2\Theta\varphi_1$, $(\varphi_1\Theta\varphi_2)\Theta\varphi_3$, $(\varphi_1^{-1}\Theta\varphi_2^{-1})^{-1}$;

5) $\overline{\varphi}_1$, $\overline{\varphi}_2$, $\overline{\varphi}_1\cup\overline{\varphi}_2$, $\overline{\varphi_1\cap\varphi_2}$, $\overline{\varphi}_1^{-1}\cap\overline{\varphi}_2^{-1}$, $\overline{\varphi_2\cap\varphi_3}$;

6) $\varphi_1\circ\varphi_2$, $\varphi_1\circ\varphi_3$, $\varphi_1\circ(\varphi_2\circ\varphi_3)$, $\varphi_1^{-1}\circ\varphi_2^{-1}$, $(\varphi_1\circ\varphi_2)^{-1}$, $(\varphi_3\circ\varphi_2)\circ\varphi_1$;

7) $\varphi_1\circ(\varphi_2\cup\varphi_3)$, $(\varphi_1\cap\varphi_2)\circ\varphi_3$, $\overline{\varphi}_1\circ\overline{\varphi}_2$, $\overline{\varphi_1\circ\varphi_2}$;

8) $\varphi_1\cup\varphi_{1\Delta}$, $\varphi_1\cap\varphi_{1\Delta}$, $(\varphi_1\circ\varphi_{1\Delta})\circ(\varphi_2\circ\varphi_{2\Delta})$, $\varphi_1\circ\varphi_{1\varnothing}$.

Ш. Пусть отношения φ, ψ и χ заданы на одном и том же множестве X. Доказать, что

1) $\varphi\subseteq\psi\rightarrow\varphi^{-1}\subseteq\psi^{-1}$;

2) $(\overline{\varphi})^{-1}=\overline{(\varphi^{-1})}$;

3) $\overline{\varphi}\cup\overline{\psi}=\overline{\varphi\cap\psi}$;

4) $\overline{\varphi}\cap\overline{\psi}=\overline{\varphi\cup\psi}$

5) $\varphi\cup(\psi\cap\chi)=(\varphi\cup\psi)\cap(\varphi\cup\chi)$;

6) $\varphi\cap(\psi\cup\chi)=(\varphi\cap\psi)\cup(\varphi\cap\chi)$.

IV. Доказать или опровергнуть, что для любых отношений φ и ψ на множестве X и для любого $A\subseteq X$ имеет место

1) $(\overline{\varphi})_A = \overline{(\varphi_A)}$;

2) $(\varphi \circ \psi)_A = \varphi_A \circ \psi_A$;

3) $\varphi_A \subseteq \psi_A \rightarrow \varphi_A^{-1} \subseteq \psi_A^{-1}$.

V. Построить граф отношения, обладающего свойствами:

1) рефлексивности, симметричности;

2) нерефлексивности, связанности;

3) асимметричности, транзитивности;

4) рефлексивности, симметричности, транзитивности;

5) рефлексивности, антисимметричности, транзитивности;

6) рефлексивности, асимметричности, транзитивности, связанности.

VI. Пусть φ и ψ - отношения, заданные на одном множестве *X*. Доказать или опровергнуть, что

1) если φ симметрично, антисимметрично, то оно также транзитивно;

2) объединение и пересечение рефлексивных отношений φ и ψ также рефлексивно;

3) объединение и пересечение антисимметричных отношений φ и ψ также антисимметрично;

4) объединение и пересечение транзитивных отношений φ и ψ также транзитивно;

5) инверсия рефлексивного и симметричного отношения φ также рефлексивна и симметрична;

6) дополнение рефлексивного и симметричного отношения φ также антирефлексивно и симметрично;

7) композиция рефлексивных, симметричных и транзитивных отношений φ и ψ также рефлексивна, симметрична и транзитивна;

8) композиция инверсий рефлексивных, симметричных и транзитивных отношений φ и ψ также рефлексивна, симметрична и транзитивна.

VII. Пусть дано отношение эквивалентности $\varphi=(X,F)$, где $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$, а $F=\{<x_1,x_1>, <x_3,x_3>, <x_1,x_6>, <x_5,x_3>, <x_6,x_1>, <x_2,x_5>, <x_6,x_6>, <x_2,x_2>, <x_2,x_3>, <x_3,x_2>, <x_3,x_5>, <x_5,x_2>, <x_5,x_5>, <x_4,x_4>\}$. Постройте разбиение множества *X*, сопряженное с отношением φ.

VIII. Пусть дано разбиение $ℑℑℑ=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ множества $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$, где $A_1=\{x_1,x_7,x_9\}$, $A_2=\{x_3,x_5\}$,

$A_3=\{x_8\}$, $A_4=\{x_2,x_4,x_6,x_{10}\}$. Постройте граф и матрицу смежности R_φ отношения эквивалентности φ, сопряженного с данным разбиением множества X.

IX. Пусть φ_1 и φ_2 - отношения эквивалентности на множестве X. Доказать или опровергнуть, что

1) объединение $\varphi_1 \cup \varphi_2$ отношений φ_1 и φ_2 также эквивалентность;

2) пересечение $\varphi_1 \cap \varphi_2$ отношений φ_1 и φ_2 также эквивалентность;

3) инверсия φ_1^{-1} отношения φ также эквивалентность;

4) композиция $\varphi_1 \circ \varphi_2$ отношений φ_1 и φ_2 тогда и только тогда когда $\varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_2 \circ \varphi_1$.

X. Доказать, что для любого разбиения $\mathfrak{J}\mathfrak{J}\mathfrak{J}$ множества X существует и единственно отношение эквивалентности $\varphi=(X,F)$, сопряженное с разбиением $\mathfrak{J}\mathfrak{J}\mathfrak{J}$ множества X.

XI. Пусть τ_1 и τ_2 - отношения толерантности на множестве X. Доказать, что

1) объединение $\tau_1 \cup \tau_2$ и пересечение $\tau_1 \cap \tau_2$ отношений τ_1 и τ_2 также толерантность;

2) инверсия τ_1^{-1} отношения τ_1 также толерантность;

3) композиция $\tau_1 \circ \tau_2$ отношений τ_1 и τ_2 тогда и только тогда толерантность, когда $\tau_1 \circ \tau_2 = \tau_2 \circ \tau_1$.

XII. Доказать, что для любого покрытия $\Re$ множества X существует отношение толерантности $\tau =(X,F)$, сопряженное с этим покрытием.

XIII. Предложить метод построения базиса, сопряженного с отношением толерантности $\tau =(X,F)$.

XIV. Постройте граф некоторого отношения совершенного строгого порядка на множестве $X=\{a,b,c,d,e,f\}$. Найдите наибольший и наименьший элементы. Пронумеруйте элементы из X так, чтобы выполнялось условие теоремы 6.3.

XV. Задайте в теоретико-множественной форме некоторое отношение строгого порядка на множестве $X=\{a,b,c,d,e,f,g,k,h\}$. Найдите максимальные совершенные подмножества этого множества и максимальные и минимальные элементы в них. Определите покрытие, сопряженное с отношением толерантности, порожденным данным строгим порядком.

XVI. Постройте такое отношение строгого порядка $\delta=(X,F)$, при котором во множестве X существует единственный максимальный элемент, но нет наименьшего элемента.

XVII. Пусть δ_1 и δ_2 - отношения строгого (совершенного строгого) порядка на множестве X. Доказать или опровергнуть, что

1) объединение $\delta_1 \cup \delta_2$ отношений δ_1 и δ_2 также строгий (совершенный строгий) порядок;

2) пересечение $\delta_1 \cap \delta_2$ отношений δ_1 и δ_2 также строгий (совершенный строгий) порядок;

3) инверсия δ_1^{-1} отношения δ_1 также строгий (совершенный строгий) плрядок;

4) композиция $\delta_1 \circ \delta_2$ отношений δ_1 и δ_2 также строгий (совершенный строгий) порядок.

XVIII. Доказать или опровергнуть, что

1) если δ - строгий порядок, то $\overline{\delta}$ - нестрогий порядок;

2) если ρ - совершенный нестрогий порядок, то $\overline{\rho}$ - совершенный строгий порядок.

XIX. Пусть ψ_1 и ψ_2 - отношения квазипорядка на множестве X. Доказать или опровергнуть, что

1) объединение $\psi_1 \cup \psi_2$ отношений ψ_1 и ψ_2 также квазипорядок;

2) пересечение $\psi_1 \cap \psi_2$ отношений ψ_1 и ψ_2 также квазипорядок;

3) инверсия ψ_1^{-1} отношения ψ_1 квазипорядок;

4) композиция $\psi_1 \circ \psi_2$ отношений ψ_1 и ψ_2 также квазипорядок;

XX. Задайте некоторое отношение квазипорядка $\psi=(X,F)$ на множестве $X=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$. Постройте индуцируемые им отношения эквивалентности на множестве X и нестрогого порядка ρ на фактормножестве X/φ.

XXI. Пусть $X=\{a,b,c\}$. Постройте на множестве X отношение, не являющееся эквивалентностью, толерантностью и всеми видами порядка.

7. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

7.1. Основные понятия и определения

Рассмотрим функцию $Y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Если независимые переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ принимают значения из множества {0, 1} и область значения функции Y также есть множество {0, 1}, то такую функцию называют булевой функцией.

Отметим два свойства булевых функций:

- любая булева функция от n аргументов определена на наборах 2^n. Обычно каждому набору аргументов присваивают номер, равный двоичному числу, который соответствует данному номеру;

- число различных булевых функций конечно и равно 2^{2^n}.

В табл.7.1 представлены функции от одного аргумента.

Таблица 7.1

x	0	1	Название	Обозначение
$f_1(x)$	0	0	константа 0	0
$f_2(x)$	0	1	аргумент x	x
$f_3(x)$	1	0	инверсия x	$\overline{x}$
$f_4(x)$	1	1	константа 1	1

Четыре булевых функций от 1-го аргумента могут быть выражены друг через друга. В качестве основы можно взять функции $f_1(x)$ и $f_3(x)$. В этом случае $f_2(x) = f_3(f_3(x))$ и $f_4(x) = f_3(f_1(x))$.

Рассмотрим теперь булевы функции от двух аргументов. Каждая из них определена на четырех наборах. В табл.7.2 представлены все функции от двух переменных.

Из 16-ти функций две из них (f_1 и f_{16}) являются константами, четыре функции (f_4, f_6, f_{11} и f_{13}) сводятся к функциям от одной переменной и являются вырожденными, остальные функции являются не вырожденные.

Определение 7.1. Множество булевых функций, рассматриваемых с операциями конъюнкция, дизъюнкция и отрицание, называется булевой алгеброй.

Будем рассматривать различные выражения (формулы) булевой алгебры, составленные с помощью:

- операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания;

- констант 0,1;

- переменных, под которыми будем понимать произвольные булевы функции, в частности двоичные переменные.

Таблица 7.2

x_1	0	0	1	1	Название	Обозначение
x_2	0	1	0	1		
$f_1(x_1,x_2)$	0	0	0	0	константа 0	0
$f_2(x_1,x_2)$	0	0	0	1	конъюнкция	$x_1 \& x_2$
$f_3(x_1,x_2)$	0	0	1	0	запрет по x_2	$x_1 \leftarrow x_2$
$f_4(x_1,x_2)$	0	0	1	1	переменная x_1	x_1
$f_5(x_1,x_2)$	0	1	0	0	запрет по x_1	$x_2 \leftarrow x_1$
$f_6(x_1,x_2)$	0	1	0	1	переменная x_2	x_2
$f_7(x_1,x_2)$	0	1	1	0	сложение по модулю 2	$x_1 \oplus x_2$
$f_8(x_1,x_2)$	0	1	1	1	дизъюнкция	$x_1 \vee x_2$
$f_9(x_1,x_2)$	1	0	0	0	операция Вебба	$x_1 \downarrow x_2$
$f_{10}(x_1,x_2)$	1	0	0	1	эквивалентность	$x_1 \leftrightarrow x_2$
$f_{11}(x_1,x_2)$	1	0	1	0	инверсия x_2	$\overline{x}_2$
$f_{12}(x_1,x_2)$	1	0	1	1	импликация от x_2 к x_1	$x_2 \rightarrow x_1$
$f_{13}(x_1,x_2)$	1	1	0	0	инверсия x_1	$\overline{x}_1$
$f_{14}(x_1,x_2)$	1	1	0	1	импликация от x_1 к x_2	$x_1 \rightarrow x_2$
$f_{15}(x_1,x_2)$	1	1	1	0	штрих Шеффера	$x_1 \vert x_2$
$f_{16}(x_1,x_2)$	1	1	1	1	константа 1	1

Порядок действия в формулах без наличия круглых скобок: вначале выполняется операция отрицания, относящаяся к одной переменной, затем конъюнкция, затем дизъюнкция.

Любая формула в булевой алгебре представляет собой некоторую булеву функцию, которая в свою очередь может быть обозначена одной буквой. Две формулы будем считать равными, если они представляют одинаковые булевы функции. Основной вопрос, возникающий при этом, - установление тождественных соотношений в булевой алгебре. Средством для установления тождественности служит в основном проверка с помощью перебора всех возможных значений переменных, входящих в рассматриваемое тождество.

Основными тождествами булевой алгебры являются: (2.1) – (2.19).

Из этих тождеств легко выводятся следующие утверждения:

- выбрасывая из произвольной дизъюнкции дизъюнктивные члены, равные 0, мы не изменим величины этой дизъюнкции;
- если в дизъюнкции хотя бы один из членов равен 1, то вся дизъюнкция равна 1;
- выбрасывая из произвольной конъюнкции все сомножители, равные 1, мы не изменим величины этой конъюнкции;
- если в конъюнкции хотя бы один из сомножителей равен 0, то вся конъюнкция равна 0;
- дизъюнкция или конъюнкция любого числа одинаковых членов x равна x.

7.2. Нормальные формы булевых функций

Рассмотрим булеву функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ от n переменных. Для переменной x_i и ее отрицания $\overline{x_i}$ введем обозначение $x_i^{\alpha_i}$, где $\alpha_i \in \{0,1\}$, причем $x_i^{\alpha_i} = x_i$ при $\alpha_i = 1$ и $x_i^{\alpha_i} = \overline{x_i}$ при $\alpha_i = 0$.

Теорема 7.1. Любую булеву функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ можно представить в виде:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigvee_{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k} x_1^{\alpha_1} \& x_2^{\alpha_2} \& ... \& x_k^{\alpha_k} \& f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, x_{k+1}, ..., x_n). \quad (7.1)$$

Здесь дизъюнкция берется по всем наборам $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$.

Доказательство. Возьмем произвольный фиксированный набор $x_1 = \alpha_1$, ..., $x_k = \alpha_k$. В этом случае в левой части выражения (7.1) будет стоять функция $f(x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_n)$. В правой части выражения (7.1) все дизъюнкции равны 0 за исключением случая, когда $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$,..., $x_k = \alpha_k$. Таким образом, в правой части также стоит величина $f(x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_n)$.

Представление функции в виде (7.1) называется разложением по k переменным.

Пример 7.1. Разложим функцию $f(x_1, x_2, x_3)$ по переменным x_1 и x_2:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 \& \overline{x}_2 \& f(0,0,x_3) \vee \overline{x}_1 \& x_2 \& f(0,1,x_3) \vee x_1 \& \overline{x}_2 \& f(1,0,x_3) \vee$$
$$\vee x_1 \& x_2 \& f(1,1,x_3).$$

Полагая в выражении (7.1) n=k, получаем:

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\underset{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n}{\vee} x_1^{\alpha_1}\& x_2^{\alpha_2}\&...\& x_n^{\alpha_n}\& f(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\ .$$

Здесь величина $f(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ принимает конкретное значение либо 0, либо 1. Выбирая те значения $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$, при которых величина $f(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=1$, получаем справедливость выражения:

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\underset{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n|f=1}{\vee} x_1^{\alpha_1}\& x_2^{\alpha_2}\&...\& x_n^{\alpha_n}\ . \qquad (7.2)$$

Полученное разложение называется ***совершенно дизъюнктивной нормальной формой*** (СДНФ) булевой функции. Оно определено для любой функции, тождественно не равной 0.

Из разложения видно, что СДНФ можно построить исходя из табличного задания функции. Для этого, для всех наборов, на которых функция f равна 1, составим выражения вида $x_1^{\alpha_1}\& x_2^{\alpha_2}\&...\& x_n^{\alpha_n}$, затем все такие конъюнкции соединим знаком дизъюнкции. В результате получим СДНФ.

Пример 7.2. Пусть функция от двух переменных задана таблично:

x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

СДНФ этой функции будет иметь вид: $\bar{x}_1\&\bar{x}_2\vee x_1\& x_2$.

СДНФ представляет собой дизъюнкции элементарных конъюнкций. Покажем, что произвольную функцию можно также представить в виде конъюнкций элементарных дизъюнкций. Для этого разложим функцию $\bar{f}(x_1,x_2,...,x_n)$ в СДНФ:

$$\bar{f}(x_1,x_2,...,x_n)=\underset{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n}{\vee} x_1^{\alpha_1}\& x_2^{\alpha_2}\&...\& x_n^{\alpha_n}\&\bar{f}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\ .$$

Отсюда имеем:

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\overline{\underset{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n}{\vee} x_1^{\alpha_1}\& x_2^{\alpha_2}\&...\& x_n^{\alpha_n}\&\bar{f}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)}=$$

$$=\underset{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n}{\&}(\bar{x}_1^{\alpha_1}\vee\bar{x}_2^{\alpha_2}\vee...\vee\bar{x}_n^{\alpha_n}\vee f(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)).$$

Рассматривая сомножители, в которых $f(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=0$, получаем

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \underset{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n | f=0}{\&} (\bar{x}_1^{\alpha_1} \vee \bar{x}_2^{\alpha_2} \vee ... \vee \bar{x}_n^{\alpha_n}). \qquad (7.3)$$

Выражение (7.3) называется ***совершенно конъюнктивной нормальной формой*** (СКНФ) булевой функции. Оно определено для любой функции, тождественно не равной 1.

Пример 7.3. Для функции из примера 7.2 СКНФ будет иметь вид $f(x_1, x_2) = (x_1 \vee \bar{x}_2) \& (\bar{x}_1 \vee x_2)$.

7.3. Варианты заданий

1. Функции от трех переменных заданы в табл.7.3. Записать функцию в виде СДНФ и СКНФ согласно указанному варианту.

Таблица 7.3

x_1	x_2	x_3	Значение функции					
			а	б	в	г	д	е
0	0	0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0

2. Функцию от трех переменных разложить по переменным:
а) x_1; б) x_2; в) x_3; г) x_1, x_2; д) x_2, x_3; е) x_1, x_3.

8. МИНИМИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

8.1. Постановка задачи

Ранее мы показали, что любая булева функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, тождественно не равная 0 или 1, может быть представлена в виде СДНФ или СКНФ. Однако часто такая запись является неэкономной и допускает упрощения, при которых получается эквивалентное выражение, содержащее меньшее число букв.

Проблема простейшего представления булевых функций сводится к проблеме выбора базиса и к проблеме наиболее экономного представления функций в этом базисе. Дадим ряд определений.

Конъюнкция $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется ***элементарной***, если в ней каждая переменная встречается не более одного раза.

Рангом элементарной конъюнкции называется число букв, образующих эту конъюнкцию.

Конъюнкция вида $P(x_1, x_2, ..., x_n) = 1$ считается элементарной конъюнкцией ***нулевого ранга***.

Дизъюнкция элементарных конъюнкций называется ***дизъюнктивной нормальной формой*** (ДНФ) булевой функции.

Аналогично можно ввести понятия конъюнктивной нормальной формы.

Из определения ДНФ и СДНФ следует, что в СДНФ входят конъюнкции наибольшего возможного для данной функции ранга. Поэтому, с точки зрения ранга конъюнкций, входящих в ДНФ, СДНФ является наиболее сложной.

Длиной ДНФ назовем число элементарных конъюнкций, образующих эту ДНФ.

ДНФ, имеющую наименьшую длину по сравнению со всеми другими ДНФ, эквивалентными данной функции, назовем ***кратчайшей ДНФ***.

ДНФ называется ***минимальной*** (МДНФ), если она включает минимальное число букв по сравнению с другими, эквивалентными ей ДНФ.

8.2. Метод неопределенных коэффициентов

Данный метод может быть применен для минимизации булевых функций от любого числа аргументов. Для простоты рассмотрим его в случае, когда n=3. Представим функцию $f(x_1, x_2, x_3)$ в виде ДНФ следующим образом:

$$f(x_1,x_2,x_3) = K_1^1 x_1 \vee K_1^0 \bar{x}_1 \vee K_2^1 x_2 \vee K_2^0 \bar{x}_2 \vee K_3^1 x_3 \vee K_3^0 \bar{x}_3 \vee K_{12}^{11} x_1 x_2 \vee K_{12}^{01} \bar{x}_1 x_2 \vee$$
$$K_{12}^{10} x_1 \bar{x}_2 \vee K_{12}^{00} \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee K_{13}^{11} x_1 x_3 \vee K_{13}^{01} \bar{x}_1 x_3 \vee K_{13}^{10} x_1 \bar{x}_3 \vee K_{13}^{00} \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee K_{23}^{11} x_2 x_3 \vee K_{23}^{01} \bar{x}_2 x_3 \vee$$
$$K_{23}^{10} x_2 \bar{x}_3 \vee K_{23}^{00} \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee K_{123}^{111} x_1 x_2 x_3 \vee K_{123}^{011} \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee K_{123}^{101} x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee K_{123}^{110} x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee K_{123}^{001} \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$$
$$\vee K_{123}^{010} \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee K_{123}^{100} x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee K_{123}^{000} \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3.$$

В данном выражении представлены все возможные конъюнктивные члены, которые могут входить в ДНФ. Коэффициенты $K=\{0,1\}$ и подбираются таким образом, чтобы получаемая ДНФ была минимальной. Если теперь задать

всевозможные наборы аргументов x_1, x_2, x_3 и приравнять полученные выражения значению функции f на данных наборах, то получим $2^n = 8$ уравнений для определения коэффициентов *К* (система (8.1)).

$$\begin{cases} f(0,0,0) = K_1^0 \vee K_2^0 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{00} \vee K_{13}^{00} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{000}; \\ f(0,0,1) = K_1^0 \vee K_2^0 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{00} \vee K_{13}^{01} \vee K_{23}^{01} \vee K_{123}^{001}; \\ f(0,1,0) = K_1^0 \vee K_2^1 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{01} \vee K_{13}^{00} \vee K_{23}^{10} \vee K_{123}^{010}; \\ f(0,1,1) = K_1^0 \vee K_2^1 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{01} \vee K_{13}^{01} \vee K_{23}^{11} \vee K_{123}^{011}; \\ f(1,0,0) = K_1^1 \vee K_2^0 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{10} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{100}; \\ f(1,0,1) = K_1^1 \vee K_2^0 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{11} \vee K_{23}^{01} \vee K_{123}^{101}; \\ f(1,1,0) = K_1^1 \vee K_2^1 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{10} \vee K_{23}^{10} \vee K_{123}^{110}; \\ f(1,1,1) = K_1^1 \vee K_2^1 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{11} \vee K_{23}^{11} \vee K_{123}^{111}. \end{cases} \quad (8.1)$$

Если набор значений (x_1, x_2, x_3) таков, что функция на этом наборе равна 0, то в левой части соответствующего уравнения системы (8.1) стоит также 0, и следовательно, все коэффициенты *К*=0.

Рассмотрев все наборы, на которых функция равна 0, получим все нулевые коэффициенты *К*. В уравнениях, в левой части которых стоит 1, вычеркнем все нулевые коэффициенты. Из оставшихся коэффициентов приравняем к 1 коэффициент, определяющий конъюнкцию наименьшего ранга, а остальные коэффициенты также приравняем к 0. Единичные коэффициенты *К* и определят соответствующую МДНФ.

Пример. Пусть функция *f* имеет вид

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3.$$

Система (8.1) для нее будет иметь вид:

$$\begin{cases} f(0,0,0) = K_1^0 \vee K_2^0 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{00} \vee K_{13}^{00} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{000} = 1; \\ f(0,0,1) = K_1^0 \vee K_2^0 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{00} \vee K_{13}^{01} \vee K_{23}^{01} \vee K_{123}^{001} = 0; \\ f(0,1,0) = K_1^0 \vee K_2^1 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{01} \vee K_{13}^{00} \vee K_{23}^{10} \vee K_{123}^{010} = 0; \\ f(0,1,1) = K_1^0 \vee K_2^1 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{01} \vee K_{13}^{01} \vee K_{23}^{11} \vee K_{123}^{011} = 0; \\ f(1,0,0) = K_1^1 \vee K_2^0 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{10} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{100} = 1; \\ f(1,0,1) = K_1^1 \vee K_2^0 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{11} \vee K_{23}^{01} \vee K_{123}^{101} = 1; \\ f(1,1,0) = K_1^1 \vee K_2^1 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{10} \vee K_{23}^{10} \vee K_{123}^{110} = 1; \\ f(1,1,1) = K_1^1 \vee K_2^1 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{11} \vee K_{23}^{11} \vee K_{123}^{111} = 1. \end{cases}$$

Приравнивая все коэффициенты в нулевых строках, имеем:

$K_1^0 = K_2^1 = K_3^1 = K_3^0 = K_2^0 = K_{12}^{01} = K_{13}^{01} = K_{23}^{11} = K_{13}^{00} = K_{23}^{10} = K_{12}^{00} = K_{23}^{01} = K_{123}^{011} =$
$= K_{123}^{010} = K_{123}^{001} = 0.$

Отсюда следует, что система примет вид:

$$\begin{cases} K_1^1 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{11} \vee K_{123}^{111} = 1; \\ K_1^1 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{10} \vee K_{123}^{110} = 1; \\ K_1^1 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{11} \vee K_{123}^{101} = 1; \\ K_1^1 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{10} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{111} = 1; \\ K_{23}^{00} \vee K_{123}^{000} = 1. \end{cases}$$

Приравняв к нулю в каждом уравнении все коэффициенты, кроме тех, которые отвечают конъюнкциям, содержащим наименьшее число переменных, окончательно находим МДНФ функции:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee x_2 \bar{x}_3.$$

8.3. Метод Квайна

При минимизации по методу Квайна предполагается, что минимизируемая функция задана в СДНФ. Будем называть элементарные конъюнкции ранга n, входящие в СДНФ, минитермами ранга *n*. Метод Квайна состоит из последовательного выполнения следующих этапов:

1. Нахождение первичных импликант. Все минитермы данной функции сравниваются между собой попарно. Если минитермы m_i и m_j имеют вид $a \,\&\, x_i$ и $a \,\&\, \overline{x_i}$, то выписывается конъюнкция a, являющаяся минитермом (*n*-1)-го ранга. Минитермы *n*-го ранга, для которых произошло склеивание, отмечаются. После построения всех минитермов ранга (*n*-1) их вновь сравнивают попарно и находят минитермы ранга (*n*-2). Данный этап заканчивается, когда вновь полученные минитермы ранга *t* уже не склеиваются между собой. Все неотмеченные минитермы называются первичными или простыми импликантами.

2. Расстановка меток. На данном этапе составляется таблица, строки которой соответствуют первичным импликантам, а столбцы - минитермам исходной СДНФ функции. Если в некоторый минитерм

СДНФ входит какой-либо из первичных импликант, то на пересечении соответствующих столбца и строки ставится метка.

3. Нахождение существенных импликант. Если в некотором столбце полученной таблицы имеется только одна метка, то первичная импликанта, стоящая в соответствующей строке, называется **существенной** импликантой. Существенные импликанты не могут быть исключены из результирующей ДНФ, поэтому из таблицы меток исключаются строки, соответствующие существенным импликантам, а также столбцы минитермов, покрываемых этими существенными импликантами.

4. Вычеркивание лишних столбцов. Исследуется таблица, полученная после этапа 3. Если есть два столбца, в которых стоят метки в одинаковых строках, то один из них вычеркивается. Это можно сделать в силу того, что покрытие оставшегося столбца будет осуществлять покрытие выброшенного минитерма.

5. Вычеркивание лишних первичных импликант. Если после этапа 4 появляются строки, в которых нет ни одной метки, то соответствующие первичные импликанты исключаются из дальнейшего рассмотрения, так как они не покрывают оставшиеся в рассмотрении минитермы.

6. Выбор минимального покрытия максимальными интервалами. Исследуется полученная таблица. Выбирается такая совокупность первичных импликант, которая включает метки во всех столбцах. При нескольких возможных вариантах такого выбора отдается предпочтение варианту покрытия с минимальным суммарным числом букв.

7. Запись решения. Полученные на этапе 3 существенные импликанты и выбранные на этапе 6 первичные импликанты соединяются между собой операцией дизъюнкция. Полученная ДНФ и есть решение нашей задачи.

Пример. Пусть функция f имеет вид

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\bar{x}_1,\bar{x}_2,x_3,x_4 \vee \bar{x}_1,x_2,\bar{x}_3,\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1,x_2,\bar{x}_3,x_4 \vee \bar{x}_1,x_2,x_3,x_4 \vee$$
$$\vee x_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3,x_4 \vee x_1,\bar{x}_2,x_3,x_4 \vee x_1,x_2,\bar{x}_3,\bar{x}_4 \vee x_1,x_2,\bar{x}_3,x_4.$$

На этапе 1 образуем минитермы 3-го ранга:

$(\bar{x}_1,x_3,x_4),(\bar{x}_2,x_3,\bar{x}_4)^*,(x_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)^*,(\bar{x}_2,x_3,x_4),(x_1,\bar{x}_2,x_3)^*,(x_2,\bar{x}_3,x_4),(x_1,\bar{x}_2,x_4),$
$(x_1,x_3,\bar{x}_4)^*,(x_1,x_2,x_3).$

Далее находим минитермы 2-го ранга: $(x_2,\bar{x}_3)$.

Так как дальнейшее склеивание невозможно, то этап получения простых импликант закончен. Ими являются минитермы 3-го ранга не помеченные символом *, а также минитерм 2-го ранга.

На этапе расстановки меток получаем табл.8.1:

Таблица 8.1

	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$	$\bar{x}_1x_2x_3x_4$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	$x_1\bar{x}_2x_3x_4$	$x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$x_1x_2\bar{x}_3x_4$
$\bar{x}_1x_3x_4$	V			V				
$\bar{x}_2x_3x_4$	V					V		
$\bar{x}_1x_2x_4$			V	V				
$x_1\bar{x}_2x_4$					V	V		
$x_1\bar{x}_3x_4$					V			V
$x_2\bar{x}_3$		V	V				V	V

Исследуя табл.8.1, находим, что первичной импликантой является минитерм 2-го ранга. Данный минитерм покрывает столбцы 2, 3, 7 и 8 таблицы, которые вычеркиваются из дальнейшего рассмотрения. В результате получаем табл.8.2.

Таблица 8.2

	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$	$\bar{x}_1x_2x_3x_4$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	$x_1\bar{x}_2x_3x_4$
$\bar{x}_1x_3x_4$	V	V		
$\bar{x}_2x_3x_4$	V			V
$\bar{x}_1x_2x_4$		V		
$x_1\bar{x}_2x_4$			V	V
$x_1\bar{x}_3x_4$			V	

Здесь лишних столбцов и первичных импликант нет, поэтому выбираем минимальные покрытия максимальными интервалами. Ими являются 1-й и 4-й минитермы третьего ранга таблицы.

В результате получаем, что МДНФ нашей функции имеет вид

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\bar{x}_1,x_3,x_4 \vee\vee x_1,\bar{x}_2,x_4 \vee x_2,\bar{x}_3.$$

8.4. Метод Мак-Класки

В методе Квайна есть одно неудобство. Оно связано с необходимостью полного попарного сравнения на этапе нахождения простых импликант. С ростом минитермов, число этих сравнений сильно возрастает. Мак-Класки предложил модернизацию первого этапа метода Квайна. Если записать минитермы в виде их двоичных

номеров, то все номера можно разбить по числу единиц в этих номерах на непересекающиеся подгруппы. При этом в i-ю группу войдут все номера, имеющие в своей двоичной записи ровно i единиц. Попарное сравнение можно производить только между соседними по номеру группами. При образовании минитермов (n-1)-го и меньшего рангов в разряды, соответствующие исключенным переменным, пишется знак "_".

Пример. Для функции из предыдущего примера ее минитермы запишутся в виде следующих двоичных кодов: 0011, 0100, 0101, 0111, 1001, 1011, 1100, 1101.

Запишем эти минитермы по группам:

0-я группа - нет;

1-я группа - 0100_5*_0;

2-я группа - 0011_5*_0, 0101_5*_0, 1001_5*_0, 1100_5*_0;

3-я группа - 0111_5*_0, 1011_5*_0, 1101_5*_0;

4-я группа - нет.

Сравнивая соседние группы, получаем по группам минитермы 3-го ранга:

1-я группа - 010__5*_0, _100_5*_0;

2-я группа - 0_11, _011, _101_5*_0, 10_1, 1_01, 110_.

Теперь находим минитермы 2-го ранга: _10_.

Первичными импликантами здесь также являются те, которые не отмечены символом *.

Дальнейшая минимизация по методу Мак-Класки совпадает с методом Квайна.

8.5. Метод Блека - Порецкого

Недостатком рассмотренных выше методов минимизации является то, что для их применения необходимо, чтобы минимизируемая функция была представлена в СДНФ. Процесс такого представления для функций с большим числом аргументов является довольно громоздкой задачей. Было бы желательно найти возможность построения сокращенной ДНФ не по СДНФ, а по произвольной ДНФ заданной функции. Идея такого построения была предложена А. Блеком и П. Порецким. Она вытекает из следующей леммы.

Лемма. Если в ДНФ для функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ входят две конъюнкции вида $A \& x_i$ и $B \& \bar{x}_i$, то имеет место равенство:

$$P = P \vee A\&B, \qquad (8.2)$$

где P - ДНФ, эквивалентная функции f.

Доказательство. Для доказательства нужно показать, что левая и правая части соотношения (8.2) принимают одинаковые значения на всех возможных наборах значений аргументов.

Рассмотрим произвольный набор $(a_1, a_2, ..., a_n)$, для которого функция $f(a_1, a_2, ..., a_n) = 1$. В силу эквивалентности между f и P имеет место равенство, вытекающее из (8.2): $1 = 1 \vee A\&B$. Это равенство тождественно, так как в дизъюнкции, стоящей справа, имеется единица.

Рассмотрим теперь произвольный набор $(a_1, a_2, ..., a_n)$, для которого функция $f(a_1, a_2, ..., a_n) = 0$. В этом случае равенство (8.2) примет вид $0 = 0 \vee A\&B$. Согласно предположению, ДНФ функции имеет вид $P = S \vee A\&x_i \vee B\bar{x}_i$. Так как на рассматриваемом наборе P=0, то из последнего равенства вытекает, что либо A, либо B равны 0. Следовательно, равенство (8.2) и в этом случае также выполняется.

Из доказанной леммы вытекает метод построения сокращенной НДФ. Для этого необходимо провести пополнение исходной ДНФ новыми членами согласно лемме. После этого надо провести элементарные поглощения и вновь повторить пополнение ДНФ. Процесс необходимо производить до тех пор, пока будут возникать новые конъюнкции. После получения сокращенной ДНФ можно использовать метод Квайна, начиная со второго этапа.

Пример. Найти сокращенную ДНФ для функции

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3.$$

Выпишем пары, удовлетворяющие лемме: $((\bar{x}_1\bar{x}_2), (x_1 x_2 \bar{x}_3))$, $((\bar{x}_1\bar{x}_2), (\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3))$, $((\bar{x}_2 x_3), (x_1 x_2 \bar{x}_3))$, $((\bar{x}_2 x_3), (\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3))$, $((x_1 x_2 x_3), (\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3))$.

Для этих пар находим значение A&B: $0, (x_1, x_2), 0, 0, (x_2 \bar{x}_3)$.

Строим пополненную ДНФ:

$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_3$.

Используя правило поглощения, получаем $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_3$. Дальнейшее пополнение невозможно. Последнее выражение и есть сокращенная ДНФ.

8.6. Варианты заданий

1. Функция от трех переменных задана в табл.3. Минимизировать методом неопределенных коэффициентов согласно указанному варианту.

2. Функция от четырех переменных задана в табл.8.3. Записать функцию в виде СДНФ и минимизировать методом Квайна - Мак-Класки, согласно указанному варианту.

Таблица 8.3

x_1	x_2	x_3	x_4	Значение функции					
				а	б	в	г	д	е
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

3. Функцию от четырех переменных минимизировать методом Блека - Порецкого:

а) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1\bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_1x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_4$;

б) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \vee x_3\bar{x}_4 \vee x_2x_3 \vee x_2\bar{x}_3x_4$;

в) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \bar{x}_1x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_4 \vee \bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3x_4$;

г) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3$;

д) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_4 \vee \bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_4 \vee x_1x_3\bar{x}_4$;

е) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3$.

9. МИНИМИЗАЦИЯ В ДРУГИХ БАЗИСАХ

9.1. Метод неопределенных коэффициентов для минимизации полиномиальной СНФ

Аналогично выражению (7.2), можно показать, что любая булева функция может быть записана в виде

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigoplus_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n | f=1} x_1^{\alpha_1} \& x_2^{\alpha_2} \& \ldots \& x_n^{\alpha_n} . \qquad (9.1)$$

Представление функции в виде выражения (9.1) называется полиномиальной совершенной нормальной формой (ПСНФ).

Пример 9.1. Рассмотрим функцию из примера 7.1. Ее полиномиальная СНФ будет иметь вид $f(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \& \bar{x}_2 \oplus x_1 \& x_2$.

Рассмотрим метод неопределенных коэффициентов для минимизации функции в полиномиальной СНФ. Пусть задана функция от трех переменных:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 \oplus x_1\bar{x}_2 x_3 \oplus x_1 x_2 \bar{x}_3 .$$

Система (8.1) для нее примет следующий вид

$$\begin{cases} f(0,0,0) = K_0 \oplus K_1^0 \oplus K_2^0 \oplus K_3^0 \oplus K_{12}^{00} \oplus K_{13}^{00} \oplus K_{23}^{00} \oplus K_{123}^{000} = 1; \\ f(0,0,1) = K_0 \oplus K_1^0 \oplus K_2^0 \oplus K_3^1 \oplus K_{12}^{00} \oplus K_{13}^{01} \oplus K_{23}^{01} \oplus K_{123}^{001} = 1; \\ f(0,1,0) = K_0 \oplus K_1^0 \oplus K_2^1 \oplus K_3^0 \oplus K_{12}^{01} \oplus K_{13}^{00} \oplus K_{23}^{10} \oplus K_{123}^{010} = 0; \\ f(0,1,1) = K_0 \oplus K_1^0 \oplus K_2^1 \oplus K_3^1 \oplus K_{12}^{01} \oplus K_{13}^{01} \oplus K_{23}^{11} \oplus K_{123}^{011} = 0; \\ f(1,0,0) = K_0 \oplus K_1^1 \oplus K_2^0 \oplus K_3^0 \oplus K_{12}^{10} \oplus K_{13}^{10} \oplus K_{23}^{00} \oplus K_{123}^{100} = 0; \\ f(1,0,1) = K_0 \oplus K_1^1 \oplus K_2^0 \oplus K_3^1 \oplus K_{12}^{10} \oplus K_{13}^{11} \oplus K_{23}^{01} \oplus K_{123}^{101} = 1; \\ f(1,1,0) = K_0 \oplus K_1^1 \oplus K_2^1 \oplus K_3^0 \oplus K_{12}^{11} \oplus K_{13}^{10} \oplus K_{23}^{10} \oplus K_{123}^{110} = 1; \\ f(1,1,1) = K_0 \oplus K_1^1 \oplus K_2^1 \oplus K_3^1 \oplus K_{12}^{11} \oplus K_{13}^{11} \oplus K_{23}^{11} \oplus K_{123}^{111} = 0. \end{cases} \qquad (9.2)$$

Если на некотором наборе функция равна 0, то для этого надо, чтобы четное число коэффициентов было не равно 0 (0 - тоже четное число). Эти коэффициенты подбираются таким образом, чтобы они определяли члены возможно меньшего ранга. В уравнениях, в которых справа стоит 1, необходимо, чтобы нечетное число коэффициентов было не равно 0. Для рассмотренного примера получаем, что $f(x_1, x_2, x_3) = x_2 \oplus x_1 x_3$.

9.2. Метод неопределенных коэффициентов в базисе, состоящем из функции Вебба

Ранее мы рассмотрели двухместную функцию Вебба. Введем n-местную операцию $W_n = x_1 \downarrow x_2 \downarrow ... \downarrow x_n$, таблица истинности которой представима ниже (табл.7).

Таблица 9.1

x_1	x_2	...	x_n	W_n
0	0	...	0	1
0	0	...	1	0
...	...	...	...	0
1	1	...	0	0
1	1	...	1	0

Для этой операции справедливы следующие соотношения:

$$\begin{cases} x \downarrow x \downarrow ... \downarrow x = \bar{x}; \\ x \downarrow x \downarrow ... \downarrow x \downarrow \bar{x} \downarrow \bar{x} \downarrow ... \downarrow \bar{x} = 0; \\ x_1 \downarrow x_2 \downarrow ... \downarrow x_n \downarrow 1 \downarrow ... \downarrow 1 = 0; \\ x_1 \downarrow x_2 \downarrow ... \downarrow x_n \downarrow 0 \downarrow ... \downarrow 0 = x_1 \downarrow x_2 \downarrow ... \downarrow x_n; \\ x_1 \downarrow x_2 \downarrow ... \downarrow x_n = \overline{x_1 \vee x_2 \vee ... x_n} = \bar{x}_1 \& \bar{x}_2 \& ... \& \bar{x}_n. \end{cases} \quad (9.3)$$

Для любой функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ можно записать, что $1 = f(x_1, x_2, ..., x_n) \vee \overline{f(x_1, x_2, ..., x_n)}$.

Пусть $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \underset{1}{\vee} F_i$. Учитывая, что $(\underset{1}{\vee} F_i) \vee (\underset{0}{\vee} F_i) = 1$, получаем $\overline{f(x_1, x_2, ..., x_n)} = \underset{0}{\vee} F_i$. Откуда следует, что $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{\underset{0}{\vee} F_i}$. Применяя выражение (3.3), получаем $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \underset{0}{\downarrow} F_i$.

Ранее мы получили выражение для F_i в виде $F_i(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1^{\alpha_1} \& x_2^{\alpha_2} \& ... \& x_n^{\alpha_n}$

Применяя к нему равенство (3.3), получаем

$$F_i(x_1, x_2, ..., x_n) = \bar{x}_1^{\alpha_1} \downarrow \bar{x}_2^{\alpha_2} \downarrow ... \downarrow \bar{x}_n^{\alpha_n}. \quad (9.4)$$

Сформулируем теперь алгоритм перехода от табличного задания функции к ее записи в виде совершенной нормальной формы в базисе функции Вебба:

1. Выбрать в таблице задания функции те наборы аргументов, на которых функция равна 0.

2. Выписать термы типа (3.4) для этих наборов. При этом, если аргумент входит в набор как 0, то он вписывается без изменений. Если же аргумент входит как 1, то выписывается его отрицание.

3. Все полученные выражения характеристических функций объединяются k-местной операцией Вебба, где k - число нулей заданной функции.

Пример. Функция $f(x_1, x_2, x_3)$ задана таблично:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

СНФ в базисе функции Вебба будет иметь вид:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \downarrow \bar{x}_2 \downarrow x_3) \downarrow (\bar{x}_1 \downarrow x_2 \downarrow \bar{x}_3) \downarrow (\bar{x}_1 \downarrow \bar{x}_2 \downarrow \bar{x}_3).$$

Рассмотрим метод неопределенных коэффициентов для минимизации функций в базисе Вебба. Как и ранее, запишем функцию с неопределенными коэффициентами для случая трех переменных:

$$f(x_1,x_2,x_3) = K_1^1 x_1 \downarrow K_1^0 \bar{x}_1 \downarrow K_2^1 x_2 \downarrow K_2^0 \bar{x}_2 \downarrow K_3^1 x_3 \downarrow K_3^0 \bar{x}_3 \downarrow K_{12}^{11}(x_1 \downarrow x_2) \downarrow K_{12}^{01}(\bar{x}_1 \downarrow x_2) \downarrow$$
$$K_{12}^{10}(x_1 \downarrow \bar{x}_2) \downarrow K_{12}^{00}(\bar{x}_1 \downarrow \bar{x}_2) \downarrow K_{13}^{11}(x_1 \downarrow x_3) \downarrow K_{13}^{01}(\bar{x}_1 \downarrow x_3) \downarrow K_{13}^{10}(x_1 \downarrow \bar{x}_3) \downarrow K_{13}^{00}(\bar{x}_1 \downarrow \bar{x}_3) \downarrow$$
$$K_{23}^{11}(x_2 \downarrow x_3) \downarrow K_{23}^{01}(\bar{x}_2 x_3) \downarrow K_{23}^{10}(x_2 \downarrow \bar{x}_3) \downarrow K_{23}^{00}(\bar{x}_2 \downarrow \bar{x}_3) \downarrow K_{123}^{111}(x_1 \downarrow x_2 \downarrow x_3) \downarrow$$
$$K_{123}^{011}(\bar{x}_1 \downarrow x_2 \downarrow x_3) \downarrow K_{123}^{101}(x_1 \downarrow \bar{x}_2 \downarrow x_3) \downarrow K_{123}^{110}(x_1 \downarrow x_2 \downarrow \bar{x}_3) \downarrow K_{123}^{001}(\bar{x}_1 \downarrow \bar{x}_2 \downarrow x_3) \downarrow$$
$$K_{123}^{010}(\bar{x}_1 \downarrow x_2 \downarrow \bar{x}_3) \downarrow K_{123}^{100}(x_1 \downarrow \bar{x}_2 \downarrow \bar{x}_3) \downarrow K_{123}^{000}(\bar{x}_1 \downarrow \bar{x}_2 \downarrow \bar{x}_3).$$

Получаем систему 8 уравнений для определения неизвестных коэффициентов. Заметим, что обращение в 1 некоторого выражения, стоящего при неизвестном К, требует обращения в 0 всех аргументов этого выражения.

Пример. Найти МНФ для функции из примера 8.2. Переходя к системе уравнений, получаем:

$$\begin{cases} f(0,0,0) = K_1^0 \downarrow K_2^0 \downarrow K_3^0 \downarrow K_{12}^{11} \downarrow K_{13}^{11} \downarrow K_{23}^{11} \downarrow K_{123}^{111} = 1; \\ f(0,0,1) = K_1^0 \downarrow K_2^0 \downarrow K_3^1 \downarrow K_{12}^{11} \downarrow K_{13}^{10} \downarrow K_{23}^{10} \downarrow K_{123}^{110} = 1; \\ f(0,1,0) = K_1^0 \downarrow K_2^1 \downarrow K_3^0 \downarrow K_{12}^{10} \downarrow K_{13}^{11} \downarrow K_{23}^{01} \downarrow K_{123}^{101} = 0; \\ f(0,1,1) = K_1^0 \downarrow K_2^1 \downarrow K_3^1 \downarrow K_{12}^{10} \downarrow K_{13}^{10} \downarrow K_{23}^{00} \downarrow K_{123}^{100} = 1; \\ f(1,0,0) = K_1^1 \downarrow K_2^0 \downarrow K_3^0 \downarrow K_{12}^{01} \downarrow K_{13}^{01} \downarrow K_{23}^{11} \downarrow K_{123}^{011} = 1; \\ f(1,0,1) = K_1^1 \downarrow K_2^0 \downarrow K_3^1 \downarrow K_{12}^{01} \downarrow K_{13}^{00} \downarrow K_{23}^{10} \downarrow K_{123}^{010} = 0; \\ f(1,1,0) = K_1^1 \downarrow K_2^1 \downarrow K_3^0 \downarrow K_{12}^{00} \downarrow K_{13}^{01} \downarrow K_{23}^{01} \downarrow K_{123}^{001} = 1; \\ f(1,1,1) = K_1^1 \downarrow K_2^1 \downarrow K_3^1 \downarrow K_{12}^{00} \downarrow K_{13}^{00} \downarrow K_{23}^{00} \downarrow K_{123}^{000} = 0. \end{cases}$$

В качестве единичных коэффициентов естественно взять K_{123}^{101} и K_{13}^{00}. СНФ данной функции примет вид

$$f(x_1,x_2,x_3) = (\bar{x}_1 \downarrow \bar{x}_3) \downarrow (x_1 \downarrow \bar{x}_2 \downarrow x_3).$$

9.3. Метод Квайна - Мак-Класки для минимизации в базисе, состоящем из функций Вебба

Метод Квайна для минимизации функций в классическом базисе был рассмотрен ранее. Все сказанное там о принципах метода и последовательности выполнения этапов минимизации остается в силе. Здесь необходимо учитывать возможное вырождение минитермов, сопровождающееся инвертированием оставшейся переменной.

Пример. Найти МНФ для следующей функции:

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \downarrow x_2 \downarrow x_3)^* \downarrow (\bar{x}_1 \downarrow x_2 \downarrow x_3)^* \downarrow (x_1 \downarrow \bar{x}_2 \downarrow x_3)^* \downarrow (x_1 \downarrow x_2 \downarrow \bar{x}_3)^* \downarrow (\bar{x}_1 \downarrow x_2 \downarrow \bar{x}_3)^*.$$

Используя ранее приведенные соотношения, произведем все возможные склеивания между минитермами. Получаем минитермы второго ранга: $(x_2 \downarrow x_3)^*$, $(x_1 \downarrow x_3)^*$, $(x_1 \downarrow x_2)^*$, $(\bar{x}_1 \downarrow x_2)^*$, $(x_2 \downarrow \bar{x}_3)^*$.

В результате склеивания между первым и последним минитермом получается вырожденный минитерм первого ранга, который инвертируется. Тот же результат получится из склеивания 3 и 4 минитермов. Удаляя из нормальной формы все поглощающиеся инверсанты, получаем сокращенную нормальную форму:

$$f(x_1,x_2,x_3) = \bar{x}_2 \downarrow (x_1 \downarrow x_3).$$

Для данного примера сокращенная нормальная форма совпадает с минимальной и построение таблицы меток и поиск минимального покрытия не дает нового результата. При этом построение таблицы и

операции с нею аналогичны работе с таблицей Квайна в классическом базисе. Единственная разница состоит в том, что вырожденная инверсанта, состоящая из одной переменной, поглощает те минитермы, которые содержат ее отрицание.

Усовершенствование первого этапа метода Квайна, предложенное Мак-Класки, применимо и в базисе Вебба. Напомним, что в методе Мак-Класки применяются двоичные номера минитермов. Если принять номер минитерма совпадающим с двоичным номером набора значений переменных, на котором минитерм, являющийся характеристической функцией единицы, принимает значение единицы, или минитерм, являющийся характеристической функцией нуля, принимает значение нуля, то применение метода Мак-Класки не зависит от базиса.

Пример. Найти МНФ функции, принимающую значение 0 на наборах 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 13, 14. Результаты минимизации сведены в табл.9.2.

Таблица 9.2

Группа	Ранг			
	4	3	2	1
0	0000*	00_0* 0_00* _000*	0__0* _0_0* __00*	___0
1	0010* 0100* 1000*	0_10* _010* 01_0* 10_0* 1_00*	__10* _1_0* 1__0*	
2	0110* 1010* 1100*	_110* 1_10* 110_ 11_0*		
3	1101* 1110*			

По неотмеченным наборам строится СНФ, учитывая, что 0 в наборе соответствует переменная, а 1 - ее отрицание, окончательно получаем:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4 \downarrow (\bar{x}_1 \downarrow \bar{x}_2 \downarrow x_3).$$

Как и в предыдущем примере, переменная вырожденного минитерма x_4 инвертируется. В данном случае сокращенная нормальная форма совпадает с минимальной. Если бы этого не было, то пришлось бы строить таблицу инверсант и производить расстановку меток обычным способом.

9.4. Варианты заданий

1. Функция от трех переменных задана в табл.9. Записать ее в полиномиальной СНФ и в базисе Вебба. Минимизировать методом неопределенных коэффициентов в одном и другом базисе согласно указанному варианту.

Таблица 9.3

x_1	x_2	x_3	Значение функции					
			а	б	в	г	д	е
0	0	0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0	0

2. Функция от четырех переменных принимает значение 0 на наборах с заданными номерами. Минимизировать методом Квайна-Мак-Класки в базисе Вебба согласно указанному варианту:

а) 0, 1, 3, 7, 8, 9, 11, 12, 13;
б) 0, 3, 5, 7, 9, 12, 14, 15;
в) 0, 1, 3, 5, 6, 8, 10, 12, 13;
г) 0, 1, 2, 4, 7, 9, 10, 11, 14, 15;
д) 0, 3, 7, 8, 10, 11, 14, 15;
е) 4, 5, 10, 11, 12, 13, 14, 15.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мальцев А.И. Алгебраические системы. М., “Наука”, 1970, 392с.

2. Бурбаки Н. Теория множеств. М., “Мир”, 1965, 455с.

3. Шиханович Ю.А. Введение в современную математику. М., “Наука”, 1965, 376 с.

4. Шрейдер Ю.А. Равенство, сходство, порядок. М., “Наука”, 1971, 255 с.

5. Биркгоф Г., Барти Т. Современная прикладная алгебра. М., “Мир”, 1976, 400 с.

6. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М., “Наука”, 1975, 240 с.

7. Гинзрург С.А. Математическая непрерывная логика и изображение функций. М., “Энергия”, 1968, 136 с.

8. Слупецкий Е., Боровский Л. Элементы математической логики и теория множеств. М., “Прогресс”, 1965, 368с.

9. Виленкин Н.Я. Рассказы о множествах. М., “Наука”, изд. 2-е, 1969, 160с.

10. Мелихов А.Н., Берштейн Л.С. Конечные четкие и расплывчатые множества. Ч.1. Таганрог: ТРТИ, 1980.

11. Поспелов Д.А. Логические методы анализа и синтеза схем. М.: Энергия, 1974.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

$W(u,v) =$

Учебное пособие

Берштейн Леонид Самойлович
Боженюк Александр Витальевич

Основы дискретной математики

Редактор
Корректор
Компьютерная верстка Боженюк А.В.

ЛР № 020565 от 23.06.1997 г. Подписано к печати
Печать офсетная. Бумага офсетная.
Формат 60х84 1/16.
Усл.печ.л. – 8,0. Уч. – изд. л. – 8,0.
Заказ № Тираж 100 экз.

«С»

Издательство Технологического института
Южного федерального университета
ГСП 17А, Таганрог, 28, Некрасовский, 44

Типография Технологического института
Южного федерального университета
ГСП 17А, Таганрог, 28, Энгельса, 1